

## Вписанные четырехугольники

9-11 класс

21.01.2017

1. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Окружности, описанные вокруг треугольников  $ABO$  и  $CDO$ , пересекались второй раз в точке  $F$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $F$ ,  $D$  и точка  $E$  пересечения отрезков  $AC$  и  $BD$  лежат на одной окружности.
2. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  пересекаются в точке  $M$  на стороне  $AD$ . Докажите, что точка  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $BMC$ .
3. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $N$ . Описанные окружности треугольников  $ANB$  и  $CND$ , повторно пересекают стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  вписан в окружность с центром в точке  $N$ .
4. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины не содержащих других вершин дуг  $AB$  и  $CD$  соответственно. Прямые, проходящие через точки  $E$  и  $F$  параллельно диагоналям четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что прямая  $KL$  содержит точку  $O$ .
5. В треугольнике  $ABC$  окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $B$ , касается прямой  $BC$ , а окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$ , касается прямой  $AB$  и пересекает первую окружность в точке  $K$ , отличной от  $B$ . Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Докажите, что угол  $BKO$  — прямой.
6. Точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — середины высот  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$ . Найдите сумму углов  $\angle B_2A_1C_2, \angle C_2B_1A_2$  и  $\angle A_2C_1B_2$ .
7. На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $A_1$  и  $C_1$  соответственно. Отрезки  $AC_1$  и  $CA_1$  пересекаются в точке  $P$ . Описанные окружности треугольников  $AA_1P$  и  $CC_1P$  вторично пересекаются в точке  $Q$ , лежащей внутри треугольника  $ACD$ . Докажите, что  $\angle PDA = \angle QBA$ .

## Вписанные четырехугольники

9-11 класс

21.01.2017

1. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке  $O$ . Окружности, описанные вокруг треугольников  $ABO$  и  $CDO$ , пересекались второй раз в точке  $F$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $F$ ,  $D$  и точка  $E$  пересечения отрезков  $AC$  и  $BD$  лежат на одной окружности.
2. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Описанные окружности треугольников  $AOB$  и  $COD$  пересекаются в точке  $M$  на стороне  $AD$ . Докажите, что точка  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $BMC$ .
3. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $N$ . Описанные окружности треугольников  $ANB$  и  $CND$ , повторно пересекают стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Докажите, что четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  вписан в окружность с центром в точке  $N$ .
4. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром в точке  $O$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины не содержащих других вершин дуг  $AB$  и  $CD$  соответственно. Прямые, проходящие через точки  $E$  и  $F$  параллельно диагоналям четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что прямая  $KL$  содержит точку  $O$ .
5. В треугольнике  $ABC$  окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $B$ , касается прямой  $BC$ , а окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$ , касается прямой  $AB$  и пересекает первую окружность в точке  $K$ , отличной от  $B$ . Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Докажите, что угол  $BKO$  — прямой.
6. Точки  $A_2, B_2$  и  $C_2$  — середины высот  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$ . Найдите сумму углов  $\angle B_2A_1C_2, \angle C_2B_1A_2$  и  $\angle A_2C_1B_2$ .
7. На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $A_1$  и  $C_1$  соответственно. Отрезки  $AC_1$  и  $CA_1$  пересекаются в точке  $P$ . Описанные окружности треугольников  $AA_1P$  и  $CC_1P$  вторично пересекаются в точке  $Q$ , лежащей внутри треугольника  $ACD$ . Докажите, что  $\angle PDA = \angle QBA$ .