Теорема Виета и не только

9-11 класс

14.01.2017

1. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2017$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

2. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

3. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

4. Рациональные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что числа

$$x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$...$$

$$x_1x_2...x_n$$

целые.
Докажите, что числа $x_1, x_2, ..., x_n$ целые.

5. Даны такие действительные числа $a_1 \le a_2 \le a_3$ и $b_1 \le b_2 \le b_3$, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

6. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

7. Средиземный многочлен (in English: Mediterranean polynomial) имеет 10 действительных корней и представляется в виде:

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где $a_0 \dots, a_7 \in R$. Какое максимальное значение может принимать корень этого многочлена?

Школа №444

Теорема Виета и не только

9-11 класс

14.01.2017

1. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2017$. Покажите, что параболы, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке.

2. При каких a и b уравнение $x^3 + ax + b = 0$ имеет три различных решения, составляющих арифметическую прогрессию?

3. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

4. Рациональные числа $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что числа

$$x_1 + x_2 + ... + x_n$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n$$

$$...$$

$$x_1x_2...x_n$$

целые.
Докажите, что числа $x_1, x_2, ..., x_n$ целые.

5. Даны такие действительные числа $a_1 \le a_2 \le a_3$ и $b_1 \le b_2 \le b_3$, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

6. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

7. Средиземный многочлен (in English: Mediterranean polynomial) имеет 10 действительных корней и представляется в виде:

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

где $a_0 \dots, a_7 \in R$. Какое максимальное значение может принимать корень этого многочлена?