

Степень точки 2

9–11 класс

9.11.2016

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . На прямой AB выбрана произвольная точка P . Докажите, что касательные, проведенные из точки P к ω_1 и ω_2 , равны.
2. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B , а другая — в точках C и D . Докажите, что прямая AD высекает на этих двух окружностях равные хорды.
3. Дан треугольник ABC . Пусть BB_1 — высота, H — ортоцентр треугольника. Докажите, что $BB_1 \cdot B_1H = AB_1 \cdot B_1H$.
4. Даны окружность ω с центром O и точка A , отличная от O .
(а) Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность ω в точках B и C . Пусть D — точка симметричная точке C относительно прямой AO ; A' — точка пересечения прямых AO и BD . Докажите, что положение точки A' не зависит от выбора секущей.
(б) Пусть A' — точка, построенная в задаче 4а; ω_1 — окружность, построенная на отрезке AA' как на диаметре. Докажите, что радиусы окружностей ω и ω_1 , проведенные в точку пересечения окружностей, перпендикулярны.
5. На прямых содержащих высоты BB_1 и CC_1 треугольника ABC отметили точки, из которых стороны AC и AB соответственно видны под прямыми углами. Докажите, что четыре отмеченные точки лежат на одной окружности.
6. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения каждой двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.
7. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . На прямой BC отмечена точка M так, что $AI \perp MI$. Точка D — основание перпендикуляра, опущенного из точки I на прямую AM . Докажите, что точки A , B , C , D лежат на одной окружности.
8. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в точке H . Точка O — центр описанной окружности. Точка A' симметрична точке A относительно прямой B_1C_1 . Докажите, что точки O , H , A_1 , A' лежат на одной окружности.