

Степень точки

9-11 класс
05.11.2016

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM . На луче CA отложен отрезок CN , равный BM . Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B ; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.
5. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.
6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD ; M — такая точка диагонали AC , что четырёхугольник $B C D M$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .
7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ , проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N , рассмотрим описанную окружность треугольника BMN . Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B .
8. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой PQ .

Степень точки

9-11 класс
05.11.2016

1. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
2. На сторонах угла с вершиной P выбраны точки A, B, C и D (A и B на одной стороне угла, C и D на другой). Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM . На луче CA отложен отрезок CN , равный BM . Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.
4. Две окружности пересекаются в точках A и B ; MN — общая касательная к ним. Докажите, что прямая AB делит отрезок MN пополам.
5. Прямая OA касается окружности в точке A , а хорда BC параллельна OA . Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L . Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам.
6. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD ; M — такая точка диагонали AC , что четырёхугольник $B C D M$ вписанный. Докажите, что прямая BD является общей касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM .
7. Даны окружность S и точки A и B вне её. Для каждой прямой ℓ , проходящей через точку A и пересекающей окружность S в точках M и N , рассмотрим описанную окружность треугольника BMN . Докажите, что все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки B .
8. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой PQ .