

Неравенства

1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ac} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

2. При положительных x, y, z докажите неравенство

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8xyz}.$$

3. Пусть x, y, z — положительные числа, каждое из которых не меньше 2. Докажите неравенство

$$(x^3 + y)(y^3 + z)(z^3 + x) \geq 125xyz.$$

4. Пусть $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ — положительные числа. Докажите, что максимальное значение выражения

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}{(1 + a_1)(a_1 + a_2) \dots (a_{n-1} + a_n)(a_n + 2^{n+1})}$$

существует и найдите a_1, a_2, \dots, a_n , при которых оно достигается.

5. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a + b + c \geq abc$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3abc}$.

6. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что

$$(x - y)(y - z)(x - z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $ab \geq 1$. Докажите, что

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq 16.$$

8. Для положительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$