

Неочевидные графы

1. В классе 30 школьников. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурили двое. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.
2. Какое наибольшее число коней, каждый из которых бьет ровно одного другого, можно расставить на доске 8×8 ?
3. Клетки клетчатой плоскости раскрашены в два цвета в шахматном порядке. (а) Связная клетчатая фигура состоит из 1001 клетки. Какое в ней может быть максимальное количество белых клеток? (б) В связной клетчатой фигуре n черных клеток и $3n$ белых. Докажите, что эту фигуру можно разрезать на T -образные фигуры из четырех клеток.
4. Есть $2n$ болельщиков болельщиков: (а) несколько из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо»; (б) ровно n из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?
5. Длины периодов двух числовых последовательностей — m и n — взаимно простые числа (имеются ввиду минимальные периоды; предпериодов нет). Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?