

Конструктивы в ТЧ

1. Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.
2. Существуют ли такие натуральные числа $f_1, f_2, \dots, f_{2018}$, что при всех значениях $1 \leq k \leq 2016$ выполнено $\frac{1}{f_{k+2}} = \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{1}{f_k}$?
3. Докажите, что существует бесконечно много арифметических прогрессий, состоящих из 2017 различных натуральных чисел таких, что в каждой из них произведение всех членов является точной 2018-й степенью.
4. Докажите, что для любого натурального числа $a_1 > 1$ существует бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ такая, что $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$ делится на $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ при всех $k \geq 1$.
5. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа a, b и c , для которых a^2 делится на $b + c$, b^2 делится на $a + c$, c^2 делится на $a + b$?
6. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия длины 2017, все члены которой являются точными степенями, выше десятой?
7. Можно ли числа от 1 до 2016 разбить на группы по 7 чисел так, чтобы сумма чисел в каждой группе делилась на 2017?
8. Существует ли последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается ровно один раз и при этом для любого $k = 1, 2, 3, \dots$ сумма первых k членов последовательности делится на k ?