## Тригонометрия

- 1. На листе бумаги нарисован график функции  $y=\sin x$ . Лист свернут в цилиндрическую трубочку так, что все точки, абсциссы которых отличаются на  $2\pi$ , совмещены. Докажите, что все точки графика синусоиды при этом лежат в одной плоскости.
- **2.** Докажите, что для каждого x такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдется такое натуральное n, что  $|\sin nx| \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- **3.** Какое наибольшее количество множителей вида  $\sin \frac{n\pi}{x}$  можно вычеркнуть в левой части уравнения

$$\sin\frac{\pi}{x}\sin\frac{2\pi}{x}\sin\frac{3\pi}{x}\dots\sin\frac{2018\pi}{x}=0$$

так, чтобы число его натуральных корней не изменилось?

- **4.** На плоскости даны оси координат с одинаковым, но не обозначенным масштабом и график функции  $y = \sin x, \ x \in (0; \alpha)$ . Как с помощью циркуля и линейки построить касательную к этому графику в заданной его точке, если: (a)  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ ; (b)  $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ ?
- **5.** Существует ли такое положительное число  $\alpha$ , что при всех действительных x верно неравенство  $|\cos x| + |\cos \alpha x| > \sin x + \sin \alpha x$ ?
- **6.** Число x таково, что обе суммы  $S=\sin 64x+\sin 65x$  и  $C=\cos 64x+\cos 65x$  рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.
- 7. Даны различные натуральные числа a,b. На координатной плоскости нарисованы графики функций  $y=\sin ax,\ y=\sin bx$  и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a,b и такое, что график функции  $y=\sin cx$  проходит через все отмеченные точки.