

Геометрия. Разнобой

1. В треугольнике ABC ($AB < AC$) точка I — центр вписанной окружности. Пусть M — середина BC , а Q — середина дуги BAC . Докажите, что $\angle BMI = \angle AQI$.
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 и на сторонах AB и AC взяты точки K и L так, что $AK = BC_1$ и $AL = CB_1$. Докажите, что прямая AO , где O — центр описанной окружности треугольника ABC , делит отрезок KL пополам.
3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC , ABD , ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC , AD .
4. Дан треугольник ABC . В нём H — точка пересечения высот, I — центр вписанной окружности, O — центр описанной окружности, K — точка касания вписанной окружности со стороной BC . Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HK также параллельны.
5. Строго внутри треугольника взята окружность ω . Каждая из окружностей ω_1 , ω_2 , ω_3 касается внешним образом окружности ω , в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно и двух сторон треугольника ABC . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.
6. Даны три точки A , B и C , не лежащие на одной прямой. Провести с помощью циркуля и линейки прямую, пересекающую AC в точке X , а BC в точке Y так, что $AX = XY = YB$.