

Геометрия. Степени точек

1. Две окружности Ω и ω имеют центр O , причём ω внутри Ω . Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB , AC к ω (B , C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N . Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC .
2. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S . Докажите, что $\angle BAM = \angle MSN$.
3. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим за X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B , C , X , Y лежат на одной окружности.
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и отмечен центр I вписанной окружности. Хорда XY описанной окружности треугольника VID проходит через точку D . Докажите, что AD — биссектриса угла XAY .
5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CC_1 , продолжение медианы AM пересекает описанную окружность в точке N . Точка D плоскости такова, что $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что A , C_1 , N , D лежат на одной окружности.
6. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты в остроугольном треугольнике ABC . На сторонах AB и AC взяты точки P и Q соответственно так, что $AP = BC_1$ и $AQ = CB_1$. Докажите, что AO делит отрезок PQ пополам, где O — центр описанной окружности треугольника ABC .
7. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC проведены высоты BB_1 , CC_1 , а точка H' — отражение ортоцентра относительно стороны BC . Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке X . Докажите, что описанная окружность треугольника AHH' проходит через середину отрезка BC .