Стереометрия со сферами

Группа 11-2
13.11.17

1. Сфера вписана в многогранный угол. Докажите, что точки касания сферы со сторонами угла лежат на одной окружности.

2. В четырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.

3. Около сферы описан пространственный четырехугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

4. В закрытой крышкой полусферической вазе лежат четыре одинаковых апельсина и грейпфрут. Апельсины касаются вазы, грейпфрут касается всех апельсинов. Верно ли, что точки касания грейпфрута с апельсинами лежат в одной плоскости?

5. В четырехугольную пирамиду $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, можно вписать сферу. Докажите, что сумма площадей граней SAB и SCD равна сумме площадей граней SBC и SDA.

6. В тетраэдре $ABCD$ проведено сечение плоскостью, перпендикулярной радиусу описанной сферы, идущему в вершину A. Это сечение пересекает ребра AB, AC, AD в точках B_1, C_1, D_1. Докажите, что B, C, D, B_1, C_1, D_1 лежат на одной сфере.

7. Вписанная сфера тетраэдра $SABC$ касается грани ABC в точке X, вневписанная сфера касается грани ABC в точке Y (и продолжений граней SAB, SBC, SCA). Докажите, что X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (т. е. что $\angle BAX = \angle YAC$ и т. п.).

ЯГУБОВ РР