

Геометрия

Задачи, которые можно (и нужно) посчитать в векторах

Группа 11-2

19.10.17

1. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB , а E — точка пересечения медиан треугольника ACD . Докажите, что $OE \perp CD$.
2. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P . Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD , пересекаются в точке Q . Докажите, что $PQ \perp AB$.
3. В треугольнике ABC известно, что AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1 , для которой $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.
4. Докажите, что сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.
5. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
 - (а) Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.
 - (б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH = 2 \cdot OM$.
 - (с) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
6. На сторонах четырехугольника $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники ABM , CBP , CDL и ADK (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что $PK = ML$.
7. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB = AC$). На продолжениях сторон BC , AB и AC выбраны точки P, X, Y таким образом, что $PX \parallel AC$ и $PY \parallel AB$ и точка P лежит на луче CB . Точка T — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC ($T \neq A$). Докажите, что $PT \perp XY$.