# Векторные пространства

*Группа 11-2*

*18.09.17*

**Определение.** Пусть даны множество $V$ («векторы») и поле $\mathbb{K}$ («числа»), имеются операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

- Сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент $(0)$ и у каждого вектора $v$ есть обратный по сложению $(-v)$;
- $1 \cdot v = v$; $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ (здесь $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$, $v \in V$);
- $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$; $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$.

Тогда $V$ называется линейным (векторным) пространством над $\mathbb{K}$.

**1.** Задайте естественную структуру линейного пространства на следующих множествах:
**(a)** $K^n$ — строки из $n$ чисел;
**(b)** линейные уравнения вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b_n$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$;
**(c)** все многочлены над полем $\mathbb{K}$;
**(d)** многочлены степени не выше $n$ над полем $\mathbb{K}$;
**(e)** векторы на плоскости и в пространстве;
**(f)** последовательности элементов поля $\mathbb{K}$;
**(g)** множество функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;
**(h)** множество непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

**2.** Образуют ли линейные пространства следующие множества (относительно естественных операций):
**(a)** многочлены степени $n$ над полем $\mathbb{K}$;
**(b)** неубывающие последовательности (над $\mathbb{R}$);
**(c)** многочлены с фиксированным корнем $\alpha$;
**(d)** строки длины $n$ с нулевой суммой элементов;
**(e)** строки длины $n$ с нулевым произведением элементов;
**(f)** последовательности элементов поля $\mathbb{K}$, в которых конечное число ненулевых элементов.

**3.** Дайте определение подпространства.

**4.** Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Опишите все его подпространства.

**Определение.** Подмножество $S$ векторного пространства называется системой образующих этого пространства, если всякий его вектор можно представить в виде $\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n$, где $v_1, \ldots, v_n \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Выражение $\alpha_1v_1 + \ldots + \alpha_nv_n$ (а также, в зависимости от контекста, и его значение) называется линейной комбинацией векторов $v1, \ldots, v_n$.

**Определение.** Пусть $S$ — произвольное подмножество векторного пространства $V$. Линейной оболочкой множества $S$ в пространстве $V$ называется совокупность $L(S)$ всех линейных комбинаций векторов из $S$.

**5.** Пусть $S = \{v_i, i \in I\}$ — семейство векторов векторного пространства $V$. Тогда следующие условия равносильны:
**(a)** никакой вектор из $V$ нельзя выразить через векторы из $S$ двумя разными способами;
**(b)** никакой вектор из $S$ нельзя выразить через остальные;
**(c)** если линейная комбинация векторов из $S$ равна нулевому вектору, то все ее коэффициенты равны 0.

**Определение.** Семейство векторов, обладающее свойствами, описанными в предыдущем предложении, называется линейно независимым, а не обладающее линейно зависимым.

**6.** Докажите следующие свойства линейной зависимости и независимости:

- система, содержащая нулевой вектор, является ЛЗ;
- система, содержащая пропорциональные векторы, является ЛЗ;
- если семейство векторов ЛНЗ, то и любая его часть ЛНЗ;
- если семейство ЛЗ, то и любое содержащее его семейство ЛЗ;
- если ЛНЗ семейство векторов не является системой образующих векторного пространства, то к этому семейству можно добавить вектор так, чтобы оно осталось ЛНЗ.

**Определение.** Система образующих $S$ векторного пространства называется его базисом, если всякий элемент пространства представляется в виде линейной комбинации элементов из $S$, причем единственным образом.

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

- $S$ — базис пространства $V$;
- $S$ — линейно независимая система образующих пространства $V$;
- $S$ линейно независимо, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из $V$;
- $S$ система образующих пространства $V$, но теряет это свойство при удалении любого вектора.