

1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

2. За круглым столом сидят 2017 человек. Раз в минуту любые двое, являющиеся друзьями, могут поменяться местами. Оказалось, что, потратив некоторое время, люди за столом могут сесть в произвольном порядке (порядок считается с точностью до поворота). Какое минимальное количество пар друзей среди этих 2017 человек?

3. На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

4. К Дню Российского флага продавец украшает витрину 12 горизонтальными полосами ткани трёх цветов. При этом он выполняет два условия:

- 1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;
- 2) каждая синяя полоса обязательно должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

5. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

6. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

7. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, ..., наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов?

1. В Национальной Баскетбольной Ассоциации 30 команд, каждая из которых проводит за год 82 матча с другими командами в регулярном чемпионате. Сможет ли руководство Ассоциации разделить команды (не обязательно поровну) на Восточную и Западную конференции и составить расписание игр так, чтобы матчи между командами из разных конференций составляли ровно половину от общего числа матчей?

2. За круглым столом сидят 2017 человек. Раз в минуту любые двое, являющиеся друзьями, могут поменяться местами. Оказалось, что, потратив некоторое время, люди за столом могут сесть в произвольном порядке (порядок считается с точностью до поворота). Какое минимальное количество пар друзей среди этих 2017 человек?

3. На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

4. К Дню Российского флага продавец украшает витрину 12 горизонтальными полосами ткани трёх цветов. При этом он выполняет два условия:

- 1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;
- 2) каждая синяя полоса обязательно должна висеть между белой и красной.

Сколькими способами он может это сделать?

5. Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.

6. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

7. Паша выбрал 2017 (не обязательно различных) натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ и играет сам с собой в следующую игру. Изначально у него есть неограниченный запас камней и 2017 больших пустых коробок. За один ход Паша добавляет в любую коробку (по своему выбору) a_1 камней, в любую из оставшихся коробок (по своему выбору) — a_2 камней, $\dots$, наконец, в оставшуюся коробку — a_{2017} камней. Пашина цель — добиться того, чтобы после некоторого хода во всех коробках стало поровну камней. Мог ли он выбрать числа так, чтобы цели можно было добиться за 43 хода, но нельзя — за меньшее ненулевое число ходов?