10 класс | **Инверсия** | 9 октября 2017

Определение. *Инверсией* с центром в точке O и радиусом R называется преобразование, которое каждую точку A, отличную от O, переводит в точку A_1 на луче OA, причем $|OA|\cdot|OA_1| = R^2$. Будем говорить, что точка O переходит в *бесконечно удаленную точку*, а бесконечно удаленная точка переходит в O.

1. a) Пусть AM и AN — касательные к окружности ω, проведённые из точки A, A_0 — середина MN. Докажите, что точки A и A_0 инверсны относительно окружности ω (т.е. A переходит в A_0 при инверсии относительно ω).
b) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Докажите, что при инверсии относительно точки A с радиусом AB дуга BC описанной окружности треугольника ABC перейдёт в отрезок BC.

2. Докажите, что при инверсии с центром в точке O
a) прямая, проходящая через O, перейдет в себя;
b) окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через центр;
c) прямая, не проходящая через O, перейдет в окружность, проходящую через O;
d) окружность, не проходящая через O, перейдет в окружность, не проходящую через O.

3. Сделаем инверсию с центром в точке касания двух окружностей. Что можно сказать про прямые, являющиеся образами этих окружностей?

4. Даны четыре окружности, причем первая касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, а четвертая — первой. Все касания внешние. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.

5. Найдите ГМТ точек касания пар окружностей, вписанных в сегмент.

6. Докажите, что для двух произвольных неперекающихся окружностей существует инверсия, которая переводит их в концентрические окружности.

7. Поризм Штейнера. Рассмотрим две неперекающиеся окружности S_1 и S_2 (S_1 лежит внутри S_2). Для произвольной окружности ω_1, касающуюся их обеих (S_1 — внешним образом, S_2 — внутренним), построим цепочку касающихся окружностей по следующему правилу — для каждого i окружность ω_i такова, что она касается S_1 (внутренним образом), S_2 и ω_{i-1} (внешним образом). Пусть цепочка замкнулась за n шагов, то есть ω_n касается ω_1. Докажите, что тогда для любой начальной окружности ω_1 цепочка замкнется за n шагов.

10 класс | **Инверсия** | 9 октября 2017

Определение. *Инверсией* с центром в точке O и радиусом R называется преобразование, которое каждую точку A, отличную от O, переводит в точку A_1 на луче OA, причем $|OA|\cdot|OA_1| = R^2$. Будем говорить, что точка O переходит в *бесконечно удаленную точку*, а бесконечно удаленная точка переходит в O.

1. a) Пусть AM и AN — касательные к окружности ω, проведённые из точки A, A_0 — середина MN. Докажите, что точки A и A_0 инверсны относительно окружности ω (т.е. A переходит в A_0 при инверсии относительно ω).
b) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Докажите, что при инверсии относительно точки A с радиусом AB дуга BC описанной окружности треугольника ABC перейдёт в отрезок BC.

2. Докажите, что при инверсии с центром в точке O
a) прямая, проходящая через O, перейдет в себя;
b) окружность, проходящая через O, переходит в прямую, не проходящую через центр;
c) прямая, не проходящая через O, перейдет в окружность, проходящую через O;
d) окружность, не проходящая через O, перейдет в окружность, не проходящую через O.

3. Сделаем инверсию с центром в точке касания двух окружностей. Что можно сказать про прямые, являющиеся образами этих окружностей?

4. Даны четыре окружности, причем первая касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, а четвертая — первой. Все касания внешние. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.

5. Найдите ГМТ точек касания пар окружностей, вписанных в сегмент.

6. Докажите, что для двух произвольных неперекающихся окружностей существует инверсия, которая переводит их в концентрические окружности.

7. Поризм Штейнера. Рассмотрим две неперекающиеся окружности S_1 и S_2 (S_1 лежит внутри S_2). Для произвольной окружности ω_1, касающуюся их обеих (S_1 — внешним образом, S_2 — внутренним), построим цепочку касающихся окружностей по следующему правилу — для каждого i окружность ω_i такова, что она касается S_1 (внутренним образом), S_2 и ω_{i-1} (внешним образом). Пусть цепочка замкнулась за n шагов, то есть ω_n касается ω_1. Докажите, что тогда для любой начальной окружности ω_1 цепочка замкнется за n шагов.