

**Определение.** Многочлен от  $n$  переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке переменных.

**Примеры симметрических многочленов.**

- $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ ;
- $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2$ ;
- *Элементарные симметрические многочлены.*  $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ .

**Основная теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены  
**a)**  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ; **b)**  $(a+b)(b+c)(c+a)$ ; **c)**  $(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$ ; **d)**  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ .
2. Про целые числа  $a, b, c$  известно, что  $a + b + c = 0$ . Докажите, что  $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$  является квадратом целого числа.
3. Известно, что  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения  $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ . Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа  $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3, y_3 = x_1 + x_2$ .
4. Известно, что

$$a + b + c = x + y + z, \quad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

Докажите, что  $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} = x^{2017} + y^{2017} + z^{2017}$ .

5. **a)** Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$  (возможно, комплексные). Выразите через  $p$  и  $q$  выражение

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

- b)** Найдите необходимые и достаточные условия на коэффициенты  $p$  и  $q$  того, что уравнение  $x^3 + px + q = 0$  имело три действительных корня (возможно, кратных).

6. Пусть дан симметрический многочлен от  $n$  переменных  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен  $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  *старшим*, если упорядоченный набор степеней  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.

- a)** Докажите, что для любого одночлена  $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  ( $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ ) существуют такие неотрицательные целые числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , что старший член многочлена  $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2} \dots \sigma_n^{\beta_n}$  совпадает с  $q$
- b)** Докажите, что числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  из предыдущего пункта определены однозначно.
- c)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

7. Многочлен  $x^{2017} + y^{2017}$  выразили через элементарные симметрические, как  $P(x + y, xy)$ . Найдите сумму коэффициентов многочлена  $P$ .

**Определение.** Многочлен от  $n$  переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке переменных.

**Примеры симметрических многочленов.**

- $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ ;
- $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \dots (x_{n-1} - x_n)^2$ ;
- *Элементарные симметрические многочлены.*  $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ .

**Основная теорема о симметрических многочленах.** Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.

1. Выразите через элементарные симметрические многочлены  
**a)**  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ; **b)**  $(a+b)(b+c)(c+a)$ ; **c)**  $(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$ ; **d)**  $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ .
2. Про целые числа  $a, b, c$  известно, что  $a + b + c = 0$ . Докажите, что  $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$  является квадратом целого числа.
3. Известно, что  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения  $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ . Составьте новое уравнение, корнями которого были бы числа  $y_1 = x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_3, y_3 = x_1 + x_2$ .
4. Известно, что

$$a + b + c = x + y + z, \quad a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

Докажите, что  $a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} = x^{2017} + y^{2017} + z^{2017}$ .

5. **a)** Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$  (возможно, комплексные). Выразите через  $p$  и  $q$  выражение

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

- b)** Найдите необходимые и достаточные условия на коэффициенты  $p$  и  $q$  того, что уравнение  $x^3 + px + q = 0$  имело три действительных корня (возможно, кратных).

6. Пусть дан симметрический многочлен от  $n$  переменных  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен  $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  *старшим*, если упорядоченный набор степеней  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.

- a)** Докажите, что для любого одночлена  $q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  ( $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$ ) существуют такие неотрицательные целые числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , что старший член многочлена  $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2} \dots \sigma_n^{\beta_n}$  совпадает с  $q$
- b)** Докажите, что числа  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  из предыдущего пункта определены однозначно.
- c)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

7. Многочлен  $x^{2017} + y^{2017}$  выразили через элементарные симметрические, как  $P(x + y, xy)$ . Найдите сумму коэффициентов многочлена  $P$ .