Алгебра-1.

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с оди- наковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффи- циентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. У квадратного трехчлена разрешается заменить любой из трех его коэффициентов на его дискриминант. Верно ли, что из любого квадратного трехчлена, не имеющего корней, можно за несколько таких операций получить квадратный трехчлен, имеющий корень?

3. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чи- сел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми ко- эффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3?

4. Из квадратного листа жести со стороной 1 пытаются сложить коробку. Для этого от каждого из углов листа отрезают равные квадраты (получают фигуру, напоминающую крест.) После этого квадрат посередине используют как дно коробки, а боковые прямоугольники как стенки. На какой наибольший объём коробки можно рассчитывать?

5. Найдите наибольшее натуральное n, которое дилит все числа вида p^6-1 для простых $p > 7$.

6. Найдите все упорядоченные пары натуральных чисел (x, y) таких, что

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

7. Дана функция f, определённая на множестве целых неотрицательных чисел. Известно, что $f(2x) = 2f(x)$, $f(4x + 1) = 4f(x) + 3$, и $f(4x - 1) = 2f(2x - 1) - 1$. Докажите, что f — инъекция, то есть если $f(x) = f(y)$, то $x = y$.

8. Найдите все целые x и y, удовлетворяющие неравенству $x^4 - 12x^2 + x^2y^2 + 30 \leqslant 0$.

9. Решите в целых числах уравнения $(a^3 + (a + 1)^3 + \ldots + (a + 6)^3 = b^4 + (b + 1)^4$.

10. Найдите число различных значение, которое принимает значение выражения $\frac{n^2-2}{n^2-n+2}$, где $n \in \{1, 2, 3, .., 100\}$.