

Серия 10. Разнобой-3.

1. Найдите все натуральные числа, равные произведению своих цифр.

2. Дракон заточил рыцаря в темницу и выдал ему 100 различных монет, половина из которых — фальшивые (но какие именно — знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в какой-то день в этих кучках окажется поровну настоящих монет, либо поровну фальшивых, то дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем на двадцать пятый день?

3. В одной из вершин n -угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

4. Известно, что $2x + 3y + 4z = 29$. Какое наименьшее значение может принимать $x^2 + y^2 + z^2$?

5. Докажите, что количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит ℓ , равно количеству разбиений числа n в сумму не более чем ℓ слагаемых, каждое из которых не превосходит k .

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Чему может быть равен угол ADC ?

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точки I_D , I_C , I_B , I_A — центры вписанных окружностей треугольников ABC , ABD , ACD и BCD соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.