

Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-2

Серия 6. Степень точки и радикальные оси.

1. Даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что ГМТ точек X таких, что степени точки X относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, — это прямая, перпендикулярная линии центров окружностей.
2. Даны три попарно неконцентрические окружности. Докажите, что их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке или параллельны.
3. К двух непересекающимся кругам провели 4 общих касательных. Докажите, что все 4 середины отрезков касательных лежат на одной прямой.
4. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все шесть точек лежат на одной окружности.
5. Прямые AB , AC — касательные к окружности ω . Точки M , N — середины отрезков AB и AC . Точка P — произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω .
6. Точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC . Оказалось, что прямая AB касается описанной окружности треугольника AMC . Докажите, что она также касается описанной окружности треугольника BMC .
7. Пусть B_1 , C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB . На продолжениях сторон AB , AC за точки B и C отметили точки X , Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X , B_1Y , BC лежат на одной прямой.
8. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP , BP , CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2 , B_2 , C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2 , BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.