ЦПМ. Группа 9-2 **25.09.2017**

Серия 5. Неравенство Коши–Буняковского

1. Докажите, что при всех (a, b, c, d) верно неравенство $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2$.

2. Известно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

3. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите максимальное значение выражения $6x - 4y + 24z$.

4. Известно, что $a + b + c = 1$. Найдите максимальное значения выражения $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$.

5. Решите уравнение $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$.

6. Докажите, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_{1987})^2}{b_1 + \ldots + b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

7. Докажите неравенство $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}\right) \geqslant (a_1+a_2+a_3+a_4)^2$.

8. Среди всех решений (a, b, c, d) системы $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geqslant 12 \end{cases}$ найти такие, при которых величина $b + d$ принимает наименьшее значение.

ЦПМ. Группа 9-2 **25.09.2017**

Серия 5. Неравенство Коши–Буняковского

1. Докажите, что при всех (a, b, c, d) верно неравенство $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqslant (ac + bd)^2$.

2. Известно, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

3. Известно, что $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$. Найдите максимальное значение выражения $6x - 4y + 24z$.

4. Известно, что $a + b + c = 1$. Найдите максимальное значения выражения $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$.

5. Решите уравнение $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$.

6. Докажите, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_{1987})^2}{b_1 + \ldots + b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

7. Докажите неравенство $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4}\right) \geqslant (a_1+a_2+a_3+a_4)^2$.

8. Среди всех решений (a, b, c, d) системы $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geqslant 12 \end{cases}$ найти такие, при которых величина $b + d$ принимает наименьшее значение.