7 класс **Графы возвращаются** 31 марта 2018

1. В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в любой другой, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более k дорог. При каких натуральных k это возможно?

2. Есть n камней различных масс. За одно взвешивание на чашечных весах можно сравнить два камня. За какое минимальное число взвешиваний можно найти самый легкий камень?

3. Выписаны первые 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

4. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

5. Даны 10 чисел $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Среди их попарных сумм нашлись 37 целых чисел. Докажите, что числа $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ целые.

6. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что каждый город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из каждого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?

7. Среди N человек каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого из этих людей ровно шесть врагов, причём враги его друзей являются его врагами. При каких N такое возможно?

8. В компании из $2n+1$ человека для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

9. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

10. В Тридевятом царстве живут несколько юношей и несколько девушек, некоторые из которых знакомы, а некоторые — нет. Известно, что у каждого юноши все знакомые с ним девушки знакомы между собой. У каждой девушки среди её знакомых юношей больше, чем девушек. Докажите, что в Тридевятом царстве юношей живёт не меньше, чем девушек.

7 класс Графы возвращаются 31 марта 2018

1. В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в любой другой, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более k дорог. При каких натуральных k это возможно?

2. Есть n камней различных масс. За одно взвешивание на чашечных весах можно сравнить два камня. За какое минимальное число взвешиваний можно найти самый легкий камень?

3. Выписаны первые 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

4. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

5. Даны 10 чисел $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Среди их попарных сумм нашлись 37 целых чисел. Докажите, что числа $2a_1, 2a_2, ..., 2a_{10}$ целые.

6. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что каждый город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими, и из каждого города можно попасть в любой другой, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее количество городов может быть в этом государстве?

7. Среди N человек каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого из этих людей ровно шесть врагов, причём враги его друзей являются его врагами. При каких N такое возможно?

8. В компании из $2n+1$ человека для любых n человек найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

9. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

10. В Тридевятом царстве живут несколько юношей и несколько девушек, некоторые из которых знакомы, а некоторые — нет. Известно, что у каждого юноши все знакомые с ним девушки знакомы между собой. У каждой девушки среди её знакомых юношей больше, чем девушек. Докажите, что в Тридевятом царстве юношей живёт не меньше, чем девушек.