7 класс — **Индукция** — 24 марта 2018

1. На столе стоят 2048 стаканов с водой. Можно взять любые два и уравнять количество воды в них. Докажите, что можно уравнять количество воды во всех стаканах.

2. Докажите с помощью индукции следующие тождества:
а) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; **б)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;
в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$; **г)** $1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots n\cdot n!=(n+1)!-1$;
д) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Из клетчатого квадрата со стороной 1024 вырезали одну клетку. Докажите, что получившуюся фигуру можно заполнить трёхклеточными уголками.

4. Число a таково, что число $a+\frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $a^n+\frac{1}{a^n}$ — тоже целое.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в *двоичную систему счисления*).

6. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина во всех бензоколонках хватит на то, чтобы проехать целый круг. Есть машина с пустым достаточно большим бензобаком. Докажите, что всегда можно найти бензоколонку, стартовав с которой, удастся проехать целый круг.

7. В стране $n\geqslant 3$ городов. Между любыми двумя из них проведена дорога с односторонним движением. Оказалось, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно построить маршрут, проходящий по всем городам один раз, и возвращающийся в начальный город.

8. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

9. Для любого натурального $n>2$ докажите, что $\sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}<3$.

10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат. Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

7 класс — **Индукция** — 24 марта 2018

1. На столе стоят 2048 стаканов с водой. Можно взять любые два и уравнять количество воды в них. Докажите, что можно уравнять количество воды во всех стаканах.

2. Докажите с помощью индукции следующие тождества:
а) $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$; **б)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;
в) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$; **г)** $1+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots n\cdot n!=(n+1)!-1$;
д) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Из клетчатого квадрата со стороной 1024 вырезали одну клетку. Докажите, что получившуюся фигуру можно заполнить трёхклеточными уголками.

4. Число a таково, что число $a+\frac{1}{a}$ — целое. Докажите, что для любого натурального n число $a^n+\frac{1}{a^n}$ — тоже целое.

5. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (т.е. перевести его в *двоичную систему счисления*).

6. На кольцевой дороге стоят бензоколонки. Суммарного количества бензина во всех бензоколонках хватит на то, чтобы проехать целый круг. Есть машина с пустым достаточно большим бензобаком. Докажите, что всегда можно найти бензоколонку, стартовав с которой, удастся проехать целый круг.

7. В стране $n\geqslant 3$ городов. Между любыми двумя из них проведена дорога с односторонним движением. Оказалось, что из любого города можно доехать до любого другого. Докажите, что можно построить маршрут, проходящий по всем городам один раз, и возвращающийся в начальный город.

8. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

9. Для любого натурального $n>2$ докажите, что $\sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}<3$.

10. В компании 100 детей, некоторые дети дружат. Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.