7 класс | Теория чисел | 24 февраля 2018

1. Пусть p и q — последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших 1.

2. Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что $a^3b^5c^6$ — седьмая степень некоторого натурального числа. Докажите, что $a^5b^6c^3$ — также седьмая степень некоторого натурального числа.

3. Арина записала на доске в ряд 2018 целых чисел. Докажите, что Варя может выбрать несколько подряд идущих чисел (возможно, одно), сумма которых делится на 2018.

4. Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k, d_2 — на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

5. Пусть a, b, x, y и n — натуральные числа. Известно, что каждое из чисел $ax-1$, $by-1$ и $x+y-1$ делится на n. Докажите, что число $ab-a-b$ также делится на n.

6. В любом ли графе можно каждой вершине присвоить натуральное число так, чтобы среди любых чисел, присвоенных любым двум смежным вершинам, одно делилось на другое, а среди двух чисел, присвоенных любым двум не смежным вершинам, ни одно из них не делилось на другое?

7. Денис задумал натуральное число, большее 10, все цифры которого одинаковы. Докажите, что оно не является точным квадратом.

8. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться так, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

9. Простое число p и целые числа a, b, c, d, e таковы, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что число $ae-d$ тоже делится на p.

10. a и b — натуральные числа, большие 1. Известно, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что b^2+a — составное число.

11. Решите в натуральных числах уравнение $5^k-3^n=16$.

12. Различные натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+a+b \vdots c$, $ac+a+c \vdots b$, $bc+b+c \vdots a$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c — составное.

7 класс | Теория чисел | 24 февраля 2018

1. Пусть p и q — последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших 1.

2. Даны натуральные числа a, b и c. Известно, что $a^3b^5c^6$ — седьмая степень некоторого натурального числа. Докажите, что $a^5b^6c^3$ — также седьмая степень некоторого натурального числа.

3. Арина записала на доске в ряд 2018 целых чисел. Докажите, что Варя может выбрать несколько подряд идущих чисел (возможно, одно), сумма которых делится на 2018.

4. Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \ldots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k, d_2 — на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

5. Пусть a, b, x, y и n — натуральные числа. Известно, что каждое из чисел $ax-1$, $by-1$ и $x+y-1$ делится на n. Докажите, что число $ab-a-b$ также делится на n.

6. В любом ли графе можно каждой вершине присвоить натуральное число так, чтобы среди любых чисел, присвоенных любым двум смежным вершинам, одно делилось на другое, а среди двух чисел, присвоенных любым двум не смежным вершинам, ни одно из них не делилось на другое?

7. Денис задумал натуральное число, большее 10, все цифры которого одинаковы. Докажите, что оно не является точным квадратом.

8. Пусть a, b, c — три натуральных числа. На доску выписали три произведения ab, ac, bc, и у каждого из них стёрли все цифры, кроме двух последних. Могло ли случиться так, что в результате получились три последовательных двузначных числа?

9. Простое число p и целые числа a, b, c, d, e таковы, что числа a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e делятся на p. Докажите, что число $ae-d$ тоже делится на p.

10. a и b — натуральные числа, большие 1. Известно, что a^2+b делится на b^2+a. Докажите, что b^2+a — составное число.

11. Решите в натуральных числах уравнение $5^k-3^n=16$.

12. Различные натуральные числа a, b, c таковы, что $ab+a+b \vdots c$, $ac+a+c \vdots b$, $bc+b+c \vdots a$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c — составное.