

1. Даны неотрицательные числа a и b . Рассмотрим следующие величины: $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ — среднее гармоническое, $G = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое, $A = \frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое, $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное. Докажите, что а) $H \leq G$; б) $G \leq A$; в) $A \leq K$.

Замечание. Для любых неотрицательных a и b справедлива цепочка неравенств $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство в любом из этих неравенств равносильно равенству чисел a и b , и равносильно равенству всех средних сразу.

2. Для действительных a, b, c докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

3. Для положительных a, b, c докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$.

4. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

5. Для неотрицательных a, b, c, d докажите, что $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$.

6. Для положительных x, y, z докажите, что

а) $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

б) $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$.

7. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

8. Сумма неотрицательных чисел a, b, c не меньше 3. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

9. Укажите какое-нибудь натуральное n , при котором $1,001^n > 10$.

10. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c.$$

1. Даны неотрицательные числа a и b . Рассмотрим следующие величины: $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ — среднее гармоническое, $G = \sqrt{ab}$ — среднее геометрическое, $A = \frac{a+b}{2}$ — среднее арифметическое, $K = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ — среднее квадратичное. Докажите, что а) $H \leq G$; б) $G \leq A$; в) $A \leq K$.

Замечание. Для любых неотрицательных a и b справедлива цепочка неравенств $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Равенство в любом из этих неравенств равносильно равенству чисел a и b , и равносильно равенству всех средних сразу.

2. Для действительных a, b, c докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

3. Для положительных a, b, c докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$.

4. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

5. Для неотрицательных a, b, c, d докажите, что $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$.

6. Для положительных x, y, z докажите, что

а) $x + \frac{1}{x} \geq 2$;

б) $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$.

7. Для неотрицательных a, b, c докажите, что

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

8. Сумма неотрицательных чисел a, b, c не меньше 3. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

9. Укажите какое-нибудь натуральное n , при котором $1,001^n > 10$.

10. Для любых положительных чисел a, b, c докажите, что

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + b^2a + c^2b + a^2c.$$