7 класс

Соответствия

20 января 2018

1. Каких чисел среди шестизначных больше: тех, у которых каждая цифра больше предыдущей, или тех, у которых каждая цифра меньше предыдущей?

2. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число натуральных делителей.

3. На кошачьей выставке в ряд сидит несколько котов и 19 кошек, причём рядом с каждой кошкой сидит более толстый кот. Докажите, что можно найти по крайней мере 10 котов, рядом с каждым из которых сидит кошка, которая тоньше его.

4. В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовём *компанией* любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки, и на сколько?

5. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали. Докажите, что количество их точек пересечения не превосходит C_n^4. (Пересечения по вершинам n-угольника не учитываются.)

6. Существуют ли такие 2018 натуральных чисел, что у любых трёх их них есть хотя бы один общий простой делитель, а у любых четырёх из них общих простых делителей нет?

7. Среди автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999 каких больше: счастливых (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр) или билетов с суммой цифр 27?

8. Будем называть натуральные числа *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Сколько существует разных способов разбить число 2018 на приблизительно равные слагаемые? (Слагаемых может быть одно или несколько. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

9. Петя считает все пути из левого нижнего узла клетчатого квадрата 10×10 в правый верхний, идущие по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающиеся выше главной диагонали. Его друг Вася расставляет в прямоугольнике 2×10 числа от 1 до 20 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по возрастанию. У кого количество способов получилось больше?

10. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.

7 класс

Соответствия

20 января 2018

1. Каких чисел среди шестизначных больше: тех, у которых каждая цифра больше предыдущей, или тех, у которых каждая цифра меньше предыдущей?

2. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число натуральных делителей.

3. На кошачьей выставке в ряд сидит несколько котов и 19 кошек, причём рядом с каждой кошкой сидит более толстый кот. Докажите, что можно найти по крайней мере 10 котов, рядом с каждым из которых сидит кошка, которая тоньше его.

4. В одном доме живут 9 мальчиков и одна девочка. Назовём *компанией* любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки, и на сколько?

5. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали. Докажите, что количество их точек пересечения не превосходит C_n^4. (Пересечения по вершинам n-угольника не учитываются.)

6. Существуют ли такие 2018 натуральных чисел, что у любых трёх их них есть хотя бы один общий простой делитель, а у любых четырёх из них общих простых делителей нет?

7. Среди автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999 каких больше: счастливых (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр) или билетов с суммой цифр 27?

8. Будем называть натуральные числа *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Сколько существует разных способов разбить число 2018 на приблизительно равные слагаемые? (Слагаемых может быть одно или несколько. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

9. Петя считает все пути из левого нижнего узла клетчатого квадрата 10×10 в правый верхний, идущие по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающиеся выше главной диагонали. Его друг Вася расставляет в прямоугольнике 2×10 числа от 1 до 20 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по возрастанию. У кого количество способов получилось больше?

10. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.