7 класс **Олимпиада** 13 января 2018

1. а) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить числа так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех чисел таблицы — положительной?

б) Решите ту же задачу для таблицы 5×5.

2. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AD \parallel BC$ и $AB = BC = BD$. Высота BK, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

3. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 123 хода, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

4. Существуют ли 11 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 1, второе — на 3, третье — на 5, ..., последнее — на 21? (Числа пронумерованы в порядке возрастания; N-е по счёту число должно делиться на $2N-1$.)

5. При каком наибольшем n можно разложить 111 монет по клеткам доски $n\times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще.)

6. Натуральные числа от 1 до 100 покрасили в 3 цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

7. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города), причём из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

7 класс **Олимпиада** 13 января 2018

1. а) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить числа так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех чисел таблицы — положительной?

б) Решите ту же задачу для таблицы 5×5.

2. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $AD \parallel BC$ и $AB = BC = BD$. Высота BK, опущенная на сторону AD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

3. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет (это тоже считается ходом). После того, как оба игрока сделают по 123 хода, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т.е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

4. Существуют ли 11 последовательных натуральных чисел, первое из которых делится на 1, второе — на 3, третье — на 5, ..., последнее — на 21? (Числа пронумерованы в порядке возрастания; N-е по счёту число должно делиться на $2N-1$.)

5. При каком наибольшем n можно разложить 111 монет по клеткам доски $n\times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще.)

6. Натуральные числа от 1 до 100 покрасили в 3 цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

7. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города), причём из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.