

Определение. Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всех натуральных n .

Воспоминание. Для любого натурального m найдётся число Фибоначчи F_n ($n \geq 1$), кратное m .

1. Найдите период последовательности остатков чисел Фибоначчи при делении на n , где $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

2. Докажите, что для любых натуральных m и n верно

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

3. а) Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

б) Докажите, что для любых натуральных m и n верно

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

Подсказка. Докажите, что для $m \geq n$ верно $(F_m, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$.

4. Рассмотрим последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на натуральное n . Докажите, что нули там встречаются на равном расстоянии друг от друга.

5. Докажите, что при всех натуральных n верно

а) $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;

б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

в) $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

г) $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;

д) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$;

е) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$;

ё) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

6. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$

Определение. Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ для всех натуральных n .

Воспоминание. Для любого натурального m найдётся число Фибоначчи F_n ($n \geq 1$), кратное m .

1. Найдите период последовательности остатков чисел Фибоначчи при делении на n , где $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

2. Докажите, что для любых натуральных m и n верно

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

3. а) Докажите, что два любых соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

б) Докажите, что для любых натуральных m и n верно

$$(F_m, F_n) = F_{(m,n)}.$$

Подсказка. Докажите, что для $m \geq n$ верно $(F_m, F_n) = (F_{m-n}, F_n)$.

4. Рассмотрим последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на натуральное n . Докажите, что нули там встречаются на равном расстоянии друг от друга.

5. Докажите, что при всех натуральных n верно

а) $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$;

б) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

в) $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

г) $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;

д) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$;

е) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$;

ё) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

6. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$