7 класс **Остатки** 30 сентября 2017

1. Найдите остаток от деления числа $1!+2!+3!+\ldots+15!$ на 15.

2. Существует ли точный квадрат, запись которого состоит из 100 нулей, 101 единицы и 104 двоек?

3. а) В строчку написано 2017 чисел так, что сумма любых двенадцати подряд идущих чисел равна 2017. Первое число 5. Каким может быть последнее число?

б) По кругу написано 2017 чисел так, что сумма любых двенадцати подряд идущих чисел равна 2017. Какие это могут быть числа?

4. Найдите все p, при которых числа p, $p+2$ и $p+4$ — простые.

5. Найдутся ли **а)** 5; **б)** 1000000 подряд идущих составных чисел?

6. Натуральное k таково, что число 2^k-1 делится на 11. Докажите, что оно делится и на 31 тоже.

7. Найдите последнюю цифру каждого из чисел 7^7, 7^{7^7}, $7^{7^{7^7}}$.

8. а) Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существуют различные натуральные k и l такие, что число a^k-a^l делится на b.

б) Даны взаимно простые натуральные числа a и b. Докажите, что существует натуральное n такое, что a^n-1 делится на b.

9. По кругу стоят a детей. Дед Мороз ходит по кругу с мешком подарков. Сначала он даёт подарок одному из детей. Затем он отсчитывает b детей по часовой стрелке и даёт подарок ребёнку, на котором закончил счёт. (Например, если $b=1$, то Дед Мороз даёт подарок следующему ребёнку, а если $b=2$, то пропускает одного.) При каких a и b Дед Мороз даст подарок каждому ребёнку?

10. Даны натуральное a и простое p.

а) Сколькими способами можно раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Способы, получающиеся друг из друга поворотами, считаем одинаковыми.)

б) Малая теорема Ферма. Докажите, что a^p-a делится на p.

7 класс **Остатки** 30 сентября 2017

1. Найдите остаток от деления числа $1!+2!+3!+\ldots+15!$ на 15.

2. Существует ли точный квадрат, запись которого состоит из 100 нулей, 101 единицы и 104 двоек?

3. а) В строчку написано 2017 чисел так, что сумма любых двенадцати подряд идущих чисел равна 2017. Первое число 5. Каким может быть последнее число?

б) По кругу написано 2017 чисел так, что сумма любых двенадцати подряд идущих чисел равна 2017. Какие это могут быть числа?

4. Найдите все p, при которых числа p, $p+2$ и $p+4$ — простые.

5. Найдутся ли **а)** 5; **б)** 1000000 подряд идущих составных чисел?

6. Натуральное k таково, что число 2^k-1 делится на 11. Докажите, что оно делится и на 31 тоже.

7. Найдите последнюю цифру каждого из чисел 7^7, 7^{7^7}, $7^{7^{7^7}}$.

8. а) Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существуют различные натуральные k и l такие, что число a^k-a^l делится на b.

б) Даны взаимно простые натуральные числа a и b. Докажите, что существует натуральное n такое, что a^n-1 делится на b.

9. По кругу стоят a детей. Дед Мороз ходит по кругу с мешком подарков. Сначала он даёт подарок одному из детей. Затем он отсчитывает b детей по часовой стрелке и даёт подарок ребёнку, на котором закончил счёт. (Например, если $b=1$, то Дед Мороз даёт подарок следующему ребёнку, а если $b=2$, то пропускает одного.) При каких a и b Дед Мороз даст подарок каждому ребёнку?

10. Даны натуральное a и простое p.

а) Сколькими способами можно раскрасить вершины правильного p-угольника в a цветов? (Способы, получающиеся друг из друга поворотами, считаем одинаковыми.)

б) Малая теорема Ферма. Докажите, что a^p-a делится на p.