

Комбинаторная геометрия

1. Докажите, что если в выпуклом n -угольнике все углы равны и последовательные стороны удовлетворяют соотношениям: $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, то $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.
2. Плоскость разбита на части N прямыми общего положения. Докажите, что в этих частях можно расставить ненулевые не превосходящие по модулю N целые числа так, чтобы сумма чисел в каждой полуплоскости относительно любой прямой была нулевой.
3. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ разрезан на параллелограммы трёх типов: со сторонами, параллельными AB и BC ; со сторонами, параллельными BC и CD ; со сторонами, параллельными CD и AB . Докажите, что суммарные площади параллелограммов каждого типа равны.
4. На плоскости даны $n \geq 3$ точек. Пусть d — максимальное расстояние между любыми двумя из этих точек. Назовём его диаметром данной системы точек. Докажите, что этих диаметров не больше n .
5. Внутри круга расположены точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, на его границе — точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ так, что отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ не пересекаются. Кузнечик может перепрыгнуть из точки A_i в точку A_j , если отрезок A_iA_j не пересекается ни с одним из отрезков A_kB_k , $k \neq i, j$. Докажите, что за несколько прыжков кузнечик сможет попасть из любой точки A_p в любую точку A_q .
6. Докажите, что если n точек плоскости не лежат все на одной прямой, то количество прямых, соединяющих попарно эти точки, не меньше n .
7. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через каждую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.