**30.01.18**

# Теорема об изогоналях

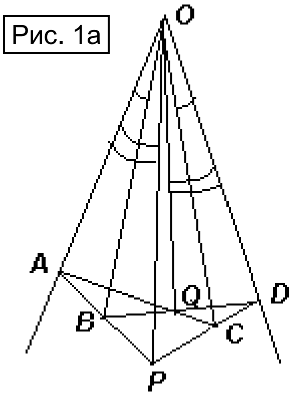
*Использованы материалы статьи А. Куликовой и Д. Прокопенко.*

На этом занятии будет предложен ряд задач, многие из которых предлагались на различных олимпиадах в разные годы. Оказалось, что для их решения можно использовать один и тот же факт, который мы предварительно докажем.

Напомню, что прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются ***изогоналями*** относительно этого угла.

**Теорема об изогоналях**. Пусть *OB* и *OC* изогонали угла *AOD*. Прямые *AC* и *BD* пересекаются в точке *Q*, а прямые *AB* и *CD* – в точке *P*. Тогда *OP* и *OQ* – также изогонали относительно угла *AOD* (см. рис. 1а).

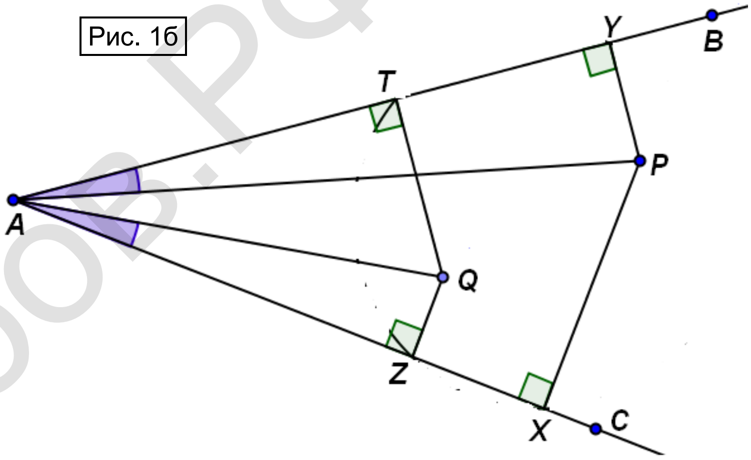
Рис. 1а




**Доказательство**. Предварительно докажем **лемму** (см. задачу 3а занятия «Педальные треугольники. Изогональное сопряжение»): Лучи *AP* и *AQ* – изогонали угла *BAC* тогда и только тогда, когда расстояния от точек *P* и *Q* до сторон угла обратно пропорциональны.

**Доказательство леммы**. Проведем перпендикуляры к сторонам угла из точек *P* и *Q*, введя обозначения так, как на рис. 1б. Если *AP* и *AQ* – изогонали, то $\angle PAB = \angle QAC$ и $\angle QAB = \angle PAC$. Из подобия треугольников *PAY* и *QAZ* следует, что $\frac{AP}{AQ}=\frac{PY}{QZ}$, а из подобия треугольников *PAX* и *QAT* следует, что $\frac{AP}{AQ}=\frac{PX}{QT}$. Тогда $\frac{PY}{PX}=\frac{QZ}{QT}$.

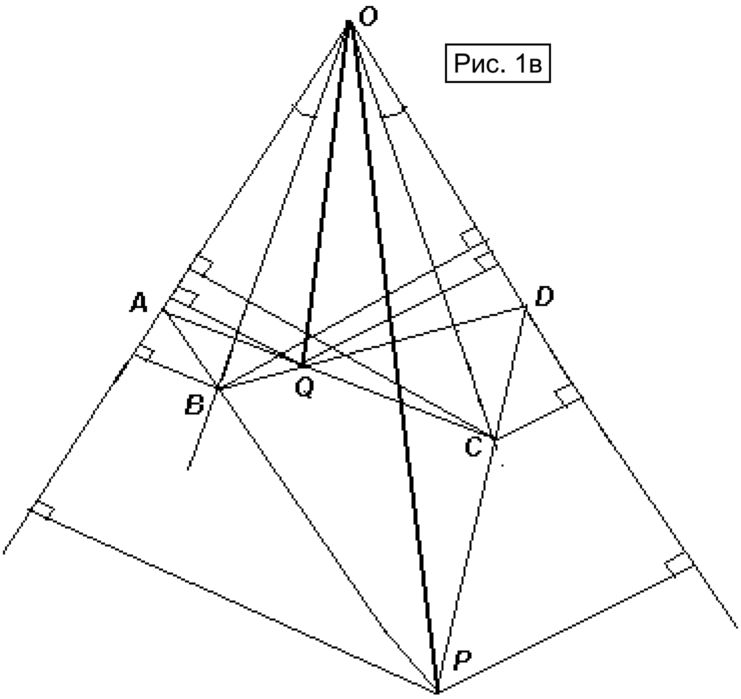
Рис. 1б




В обратную сторону рассуждаем от противного, зафиксировав, например точку *P*. Тогда, если *AQ* – не изогональ к *AP*, то левая часть равенства не изменяется, а правая – либо увеличивается, либо уменьшается.

Перейдем к доказательству теоремы. Проведем перпендикуляры к сторонам угла *AOD* из точек *B*, *C*, *P* и *Q*. Пусть $x_P$ и $y_P$ – расстояния от точки P до *OA* и *OD* соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния до сторон угла от точек *B*, *C* и *Q* (см. рис. 1в). По лемме, условие изогональности *OP* и *OQ* равносильно выполнению равенства $\frac{x_P}{y_P}=\frac{y_Q}{x_Q}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q}=1$.

Рис. 1в




Из подобия четырех пар подобных треугольников получим: $\frac{x_P}{x_B}=\frac{AP}{AB}$, $\frac{y_P}{y_C}=\frac{DP}{DC}$, $\frac{x_Q}{x_C}=\frac{AQ}{AC}$,

$\frac{y_Q}{y_B} = \frac{DQ}{DB}$. Тогда $\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ}$.

Так как точки *B* и *C* лежат на изогоналях, то $\frac{x_B x_C}{y_B y_C}$ = 1. По теореме Менелая для треугольника *APC* и прямой *BD*: $\frac{PB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DP}$ = 1. Аналогично, для треугольника *AQB* и прямой *PD*: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DQ} \cdot \frac{QC}{CA}$ = 1. Почленно перемножив последние два равенства, получим: $\frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ}$ = 1. Следовательно, $\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q}$ = 1, что и требовалось.

Прежде, чем вы перейдете к решению задач, ***три комментария***:

**1)** теорема справедлива и для случая внешних изогоналей (то есть, точки *P* и *Q* могут лежать и вне угла *AOD*);

**2)** если лучи *OP* и *OQ* совпадают, то этот луч является биссектрисой угла *AOD* (вырожденный случай, который является следствием теоремы);

**3)** теорему можно обобщить на случай, когда *P* – бесконечно удаленная точка, то есть, когда *AB* || *DC*. Тогда луч *OP* также им параллелен.

Действительно, пусть это не так и *OP* – не изогональ с *OQ*, тогда этой диагональю является луч *OP*’, который должен пересечь *AB* è *DC* в одной и той же точке, что невозможно (см. рис. 1г).

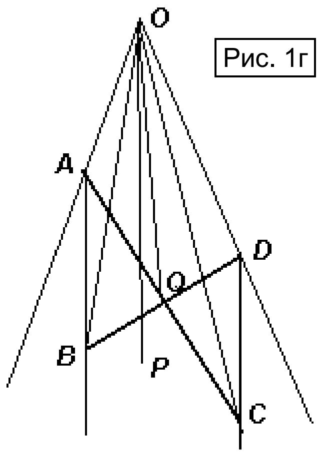


Рис. 1г

**Упражнения и задачи для самостоятельного решения**

**1.** В треугольнике *ABC* .чевианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что $AA_1$ – высота треугольника *ABC*.

**2.** (*Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 2008*) Диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*, а прямые *AB* и *DC* – в точке *F*. На луче *FE* отмечена точка *P* так, .что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, .что $\angle APE = \angle DPE$.

**3.** (*Турнир городов, 2006*) В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AA*’, на которой отмечена точка *X*. Прямая *BX* пересекает *AC* в точке *B*’, а прямая *CX* пересекает *AB* в точке *C*’. Отрезки *A*’*B*’ и *CC*’ пересекаются в точке *P*, а отрезки *A*’*C*’ и *BB*’ – в точке *Q*. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

**4.** а) На сторонах *AB* и *AC* остроугольного треугольника *ABC* вне его построены квадраты *ABFE* и *ACGT*. Докажите, что точка *P* пересечения прямых *CF* и *BG* лежит на высоте $AA_1$ треугольника *ABC*.

б) (*Городская устная олимпиада по геометрии, 2010*) Из вершины *A* параллелограмма *ABCD* опущены перпендикуляры *AM* на *BC* и *AN* на *CD*. *P* – точка пересечения *BN* и *DM*. Докажите, что $AP \perp MN$.

в) Обобщите утверждения пунктов а) и б).

**5.** (*Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, финал, 2016*) Продолжения боковых сторон трапеции *ABCD* пересекаются в точке *P*, а ее диагонали – в точке *Q*. На меньшем основании *BC* отмечена точка *M* так, что *AM* = *MD*. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

**6.** (*Городская устная олимпиада по геометрии, 2014*) Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Пусть *I* и *J* – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABC* и *ADC* соответственно, а $I_a$ и $J_a$ – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон *BC* и *DC*. Докажите, что точка пересечения прямых $IJ_a$ и $JI_a$ лежит на биссектрисе угла *BCD*.

**7.** а) На диагонали $AC$ ромба $ABCD$ Отмечена произвольная точка $E$. На прямых $AB$ и $BC$ выбраны точки $N$ и $M$ соответственно так, что $NE = AE$ и $ME = CE$. Прямые $AM$ и $CN$ пересекаются в точке $K$. Докажите, что точки $K$, $E$ и $D$ лежат на одной прямой.
б) (*Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, заочный тур, 2013*) На стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбирается произвольная точка $C_1$. Точки $A_1$ и $B_1$ выбираются на лучах $BC$ и $AC$ так, чтобы $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $C_2$. Докажите, что все такие прямые $C_1C_2$ проходят через одну и ту же фиксированную точку.
**8.** Внутри треугольника $ABC$ отмечены точки $X$, $Y$ и $Z$ так, что $\angle BAZ = \angle CAY$, $\angle CBX = \angle ABZ$ и $\angle A\tilde{N}Y = \angle BCX$. Докажите, что в одной точке пересекаются прямые:
а) $AX$, $BY$ и $CZ$; б) $X'Z'$, $XZ$ и $AC$ ($X'$ и $Z'$ – точки, изогонально сопряженные точкам $X$ и $Z$ относительно $ABC$).
**9.** Из вершин $A$ и $C$ треугольника $ABC$ опущены перпендикуляры $AA_1$ и $CC_1$ на прямую, содержащую внешнюю биссектрису угла при вершине $B$. Докажите, что $AC_1$ и $CA_1$ пересекаются на биссектрисе угла $ABC$.
**10.** а) (*Short List IMO, 2007*) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$. Точка $Q$ лежит между параллельными прямыми $BC$ и $AD$ так, что $\angle AQD = \angle CQB$ ($P$ и $Q$ лежат в разных полуплоскостях относительно $CD$). Докажите, что $\angle \hat{A}Q\text{Đ} = \angle DAQ$.
б) (*Всероссийская олимпиада по математике, 2012, региональный тур*) В трапеции $ABCD$ боковая сторона $CD$ перпендикулярна основаниям, $O$ – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника $OCD$ отмечена точка $S$, диаметрально противоположная точке $O$. Докажите, что $\angle \hat{A}SC = \angle ASD$.
**11.** В треугольнике ABC отмечены две пары изогонально сопряженных точек: $X$ и $X'$, $Y$ и $Y'$. $Z$ – точка пересечения $XY$ и $X'Y'$, $Z'$ – точка пересечения $X'Y$ и $XY'$. Докажите, что $Z$ и $Z'$ – также изогонально сопряженные.