

Лемма Саваямы и окружности Тебо

Использованы материалы занятий П.А. Кожевникова (см. <http://geometry.ru/persons/kozhevnikov/sawayama.pdf>), статья В.Ю. Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» (см. <http://geometry.ru/articles/protasovtebo.pdf>) и работа М. Урьева (<https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works/uriev2.pdf>).

На этом занятии будут рассмотрены факты, которые являются обобщением некоторых свойств полувиписанной окружности. Главный факт, из которого будет следовать почти все остальное, это **лемма Саваямы**, которая является обобщением **леммы Варъера** (см. пункт 7 занятия «Полувиписанная окружность»).

Лемма Саваямы. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M . Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC , отрезка MB в точке Q и прямой AM в точке P . Тогда инцентр I треугольника ABC лежит на отрезке PQ (см. рис. 1).

Из нее, в частности, будет следовать и **теорема Фейербаха**, одно из доказательств которой мы уже рассматривали, и **теорема Тебо**.

Теорема Тебо. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M . В криволинейные треугольники AMB и AMC вписаны окружности. Тогда линия центров этих окружностей содержит инцентр треугольника ABC (см. рис. 2).

Эти две окружности называют **окружностями Тебо**.

Для их доказательства вам потребуется предварительно доказать несколько вспомогательных утверждений, а после того, как они будут доказаны, можно будет их использовать для решения следующих задач.

Если доказательство леммы Саваямы вызовет большие трудности, то разрешено ее использовать для дальнейшего, а доказательство вы сможете изучить самостоятельно.

Рис. 1

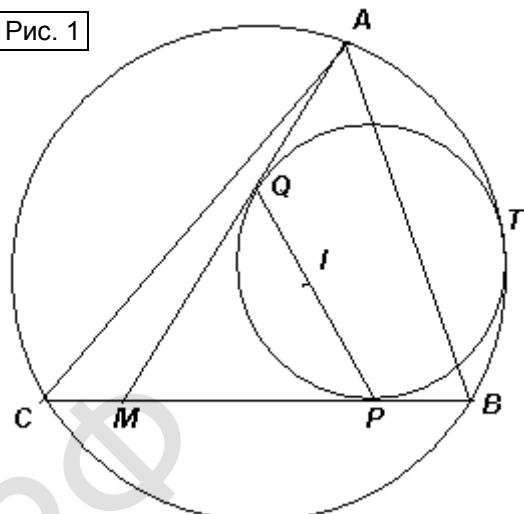
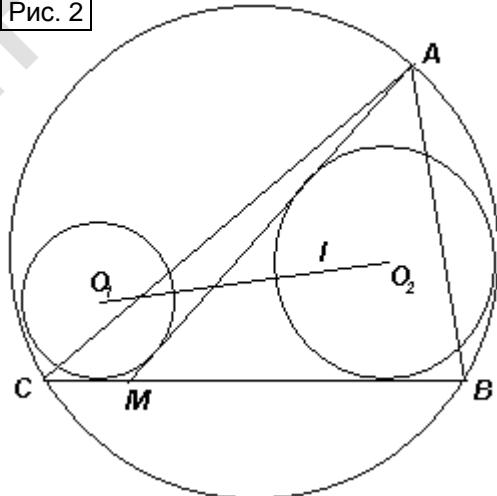


Рис. 2



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Задача 1 может служить леммой к задаче 4, задача 2 – к задаче 5, задача 3 – к задаче 6.

1. Окружности α и β касаются в точке T . Касательная к окружности β в точке Q пересекает окружность α в точках A и B . Прямая QT вторично пересекает α в точке L . Докажите, что:
а) L – середина дуги AB ; б) $LQ \cdot LT = LA^2 = LB^2$.

2. К окружностям с центрами O_1 и O_2 проведена общая внутренняя касательная A_1A_2 и общая внешняя касательная B_1B_2 (A_1 и B_1 – точки ее касания с окружностью O_1 , A_2 и B_2 – с окружностью O_2). Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – диаметры окружностей ω_1 и ω_2 . Докажите, что:
а) прямая O_1O_2 – радиальная ось окружностей ω_1 и ω_2 ; б) прямые O_1O_2 , A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике ABC : M_C и M_B – середины сторон AB и AC соответственно, A_1 и B_1 – точки касания сторон AC и BC с вписанной окружностью, а A_2 и B_2 – точки касания

стороны AC и продолжения стороны BC с вневписанной окружностью соответственно. Докажите, что прямые M_CM_B , A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC .

4. (Лемма Саваямы) На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M . Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC , отрезка MB в точке Q и прямой AM в точке P . Докажите, что инцентр I треугольника ABC лежит на отрезке PQ .

5. а) (Теорема Тебо) На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M . В криволинейные треугольники AMB и AMC вписаны окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей содержит инцентр треугольника ABC .

б) Объясните построение окружностей Тебо, если заданы треугольник ABC и точка M .

6. Докажите теорему Фейербаха, используя окружности Тебо.

7. Окружность вписана в угол с вершиной C . Рассматриваются все треугольники ABC , у которых AB – касательная к этой окружности, а вершины A и B лежат на сторонах угла. Докажите, что описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности.

8. Окружность касается оснований AB и CD трапеции $ABCD$ и меньшей дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что она касается и вписанной окружности этого треугольника.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, I_1 и I_2 – инцентры треугольников ABD и ACD , I_3 и I_4 – центры вневписанных окружностей треугольников ABC и BCD , касающихся сторон AB и CD соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной прямой.

10. Пусть AM – биссектриса треугольника ABC . Докажите, что окружности Тебо касаются в инцентре треугольника ABC .

11. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M и построены окружности Тебо с центрами O_1 и O_2 . К ним проведена общая внешняя касательная, отличная от BC , которая пересекает AM в точке K . Докажите, что:

а) инцентр I треугольника ABC является проекцией точки K на прямую O_1O_2 ;

б) прямая, параллельная BC и проходящая через точку K , является касательной к вписанной окружности треугольника ABC ;

в)
$$\frac{O_1I}{O_2I} = \operatorname{tg}^2 \frac{\angle AMB}{2};$$

г) окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC .