Точки Брокара

1. Рассмотрим остроугольный треугольник *ABC*. На его сторонах вне треугольника построим треугольники с вершинами *A*', *B*' и *C*' так, что $\Delta CA'B \sim \Delta CAB' \sim \Delta C'AB \sim \Delta ABC$ (см. рис. 1а). Для удобства, обозначим соответственно равные углы этих треугольников буквами α, β и γ.

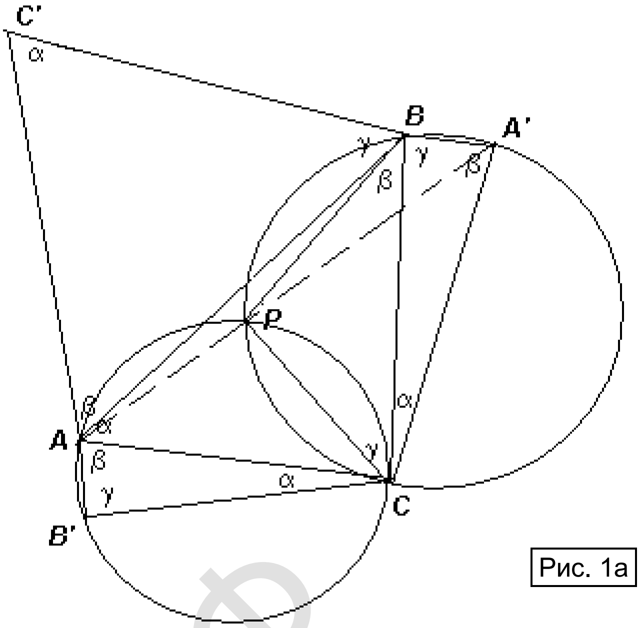


Рис. 1а

1) Докажем, что ***окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в одной точке***.

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников *CA'B* и *CAB'* вторично пересекаются в точке *P* (*изобразить*). Тогда $\angle APB = 360° - (\angle APC + \angle BPC) = \gamma + \beta = 180° - \alpha$. Это означает, что точка *P* лежит на окружности, описанной около треугольника *C'AB*.

2) Докажем, что ***в этой же точке пересекаются прямые AA', BB' и CC'***.

Доказательство. $\angle APA' = \angle APC + \angle CPA' = (180° - \gamma) + \angle CBA' = 180°$, то есть точка *P* лежит на прямой *AA*'. Аналогично доказывается, что точка *P* лежит на прямых *AA*' и *BB*'.

3) Докажем, что $\angle PBA = \angle PAC = \angle PCB$.

Доказательство. $\angle PBA = \beta - \angle PBC = \beta - \angle PA'C = \beta - (180° - \angle PAC - \alpha - \gamma) = \angle PAC$, что и требовалось. Аналогично доказывается равенство другой пары углов.

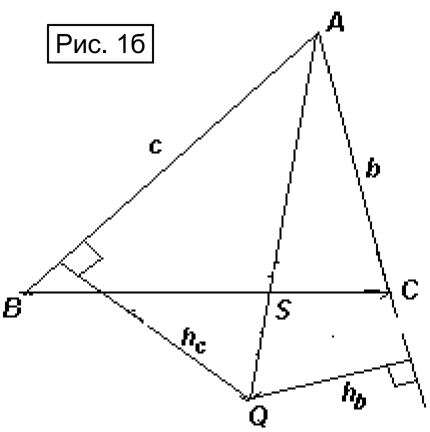
Точку ***P***, удовлетворяющую доказанному равенству, ***называют первой точкой Брокара треугольника ABC***, а ***угол*** $\varphi = \angle PBA = \angle PAC = \angle PCB$ ***называют углом Брокара этого треугольника*** (*обход вершин треугольника в равенстве углов – против часовой стрелки*).

Отметим, что доказанные соотношения верны не только для остроугольного треугольника. Чтобы убедится в этом, достаточно провести аналогичный счет углов, либо в наших доказательствах перейти от обычных углов к углам между прямыми.

Верно ли, что точка *P* всегда лежит внутри треугольника *ABC*? [Да, см. **1)**]

Утверждения, доказанные в пунктах 1) и 2) дают ***два различных способа построения первой точки Брокара***. Кроме того, из равенства накрест лежащих углов следует, что ***A'B || AC, C'A || BC*** и ***B'C || AB***.

2. В процессе решения задач вы докажете, что у любого треугольника есть две точки Брокара. Кроме того, вы вновь встретитесь с понятием ***изогонального сопряжения***, а также сможете установить ***связь между точками Брокара и точкой Лемуана*** и тем самым получить еще один способ построения точек Брокара.

Рис. 1б


Напомню, что точка Лемуана – это точка пересечения симедиан треугольника. Вам может помочь факт, доказанный на занятии «Симедиана»: ***симедиана – геометрическое место таких точек Q, принадлежащих углу A треугольника ABC, для которых расстояния от точки Q до прямых, содержащих стороны AB и AC, пропорциональны этим сторонам***, то есть $\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}$ (см. рис. 1б).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проходящая через вершину *C*, пересекает прямую, проходящую через вершину *B* параллельно прямой *AC*, в точке *A*'. Докажите, что $\angle A'AC = \varphi$ (углу Брокара треугольника *ABC*).

2. Через точку Брокара *P* треугольника *ABC* проведены прямые *AP*, *BP* и *CP*, пересекающие окружность, описанную около *ABC*, в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A_1$.

3. Докажите, что $ctg\varphi = ctg\alpha + ctg\beta + ctg\gamma$, где α, β и γ – углы треугольника, φ – его угол Брокара.

4. Докажите, что: а) в любом треугольнике *ABC* существует вторая точка Брокара *Q* (такая, что $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$); б) углы Брокара для точек *P* и *Q* треугольника *ABC* равны; в) точки *P* и *Q* изогонально сопряжены относительно треугольника *ABC*.

5. а) Докажите, что $\sin^3\varphi = \sin(\alpha-\varphi)\sin(\beta-\varphi)\sin(\gamma-\varphi)$, где α, β и γ – углы треугольника, φ – его угол Брокара. б) Пусть *P* – точка Брокара треугольника *ABC*; R_1, R_2 и R_3 – радиусы окружностей, описанных около треугольников *ABP*, *BCP* и *CAP*. Докажите, что $R_1R_2R_3 = R^3$, где *R* – радиус описанной окружности треугольника *ABC*.

6. Докажите, что: а) в любом треугольнике угол Брокара $\varphi \le 30°$; б) для любой точки *M*, лежащей внутри треугольника *ABC*, хотя бы один из углов *ABM*, *BCM* или *CAM* не больше, чем 30°.

7. Пусть *P* и *Q* – точки Брокара треугольника *ABC*. Прямые *CP* и *BQ*, *AP* и *CQ*, *BP* и *AQ* пересекаются в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точки *P* и *Q*.

8. Пусть *A*', *B*' и *C*' – проекции точки Лемуана треугольника *ABC* на серединные перпендикуляры к сторонам *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Докажите, что: а) $\Delta CA'B \sim \Delta CAB' \sim \Delta C'AB$; б) прямые *AB*', *BC*' и *CA*' пересекаются в первой точке Брокара *P*; в) обе точки Брокара этого треугольника лежат на окружности с диаметром *OL* и симметричны относительно него (*O* и *L* – центр описанной окружности и точка Лемуана треугольника *ABC* соответственно).

9. Пусть *Q* – вторая точка Брокара треугольника *ABC*, *O* – центр его описанной окружности, A_1, B_1 и C_1 – центры описанных окружностей треугольников *CAQ*, *ABQ* и *BCQ* соответственно. Докажите, что: а) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$; б) *O* – первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.

10. На сторонах *CA*, *AB* и *BC* остроугольного треугольника *ABC* отмечены точки A_1, B_1 и C_1 соответственно так, что $\angle AB_1A_1 = \angle BC_1B_1 = \angle CA_1C_1 = \varphi$. Докажите, что существует поворотная гомотетия, переводящая треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник *ABC*, причем ее центр совпадает с первой точкой Брокара обоих треугольников.