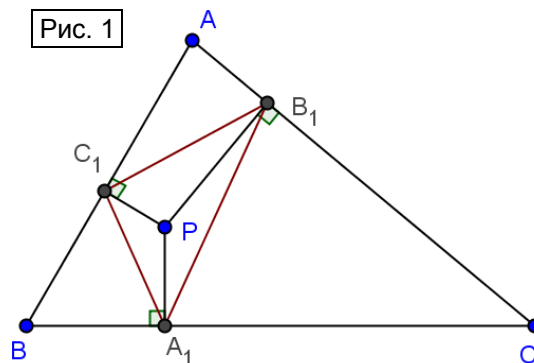


Педальные треугольники. Изогональное сопряжение

В течение двух занятий мы обсудим вопросы, связанные с изогональным сопряжением на плоскости, и соотнесем их с уже известными вам фактами геометрии.

Определение 1. Пусть на плоскости даны треугольник ABC и некоторая точка P . Треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из P на прямые, содержащие стороны треугольника, называется **педальным треугольником P относительно ABC** (см. рис. 1).

Рис. 1



С какими из педальных треугольников вы хорошо знакомы? [Со срединным треугольником, ортотреугольником, треугольником, образованным точками касания вписанной окружности со сторонами]

Для каких точек плоскости педального треугольника относительно ABC не существует? [Для точек описанной окружности треугольника ABC (прямая Симсона)]

Определение 2. Пусть дан угол BAC . Прямые, проходящие через точку A и симметричные относительно его биссектрисы, называются **изогоналями**.

Приведите примеры известных вам изогоналей. [Медиана и симедиана; высота треугольника и радиус его описанной окружности, проведенные из одной вершины]

Рассмотрим **характеристическое свойство изогоналей**.

Теорема. Пусть B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны угла A . Тогда AP и AQ являются изогоналями тогда и только тогда, когда $AQ \perp B_1C_1$.

Доказательство. Пусть P лежит внутри угла A (остальные случаи аналогичны). Рассмотрим точки K и M , симметричные точке P относительно сторон угла (см. рис. 2а). Тогда $KM \parallel B_1C_1$, поэтому утверждение задачи равносильно тому, что $AQ \perp KM$.

Пусть $\angle B_1AC_1 = \alpha$, $\angle PAC_1 = \angle MAC_1 = \varphi$. Тогда $\angle PAB_1 = \angle KAB_1 = \alpha - \varphi$, $\angle KAM = 2\alpha$. Так как $AM = AP = AK$, то биссектриса угла KAM перпендикулярна KM . Она содержит точку Q тогда и только тогда, когда $\angle QAB_1 = \angle QAK - \angle B_1AK = \alpha - (\alpha - \varphi) = \varphi = \angle PAC_1$, то есть когда AQ симметрична AP относительно биссектрисы угла A .

Из этой теоремы следует важное утверждение.

Пусть дан треугольник ABC и некоторая точка P . Тогда изогонали прямых AP , BP и CP относительно соответствующих углов треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства дополним рис. 2а до треугольника (см. рис. 2б). По доказанному, AQ изогональна AP тогда и только тогда, когда AP – серединный перпендикуляр к отрезку KM .

Проведя аналогичные рассуждения для изогоналей BP и CP , получим, что изогонали являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника KLM , которые пересекаются в точке Q – центре окружности, описанной около этого треугольника.

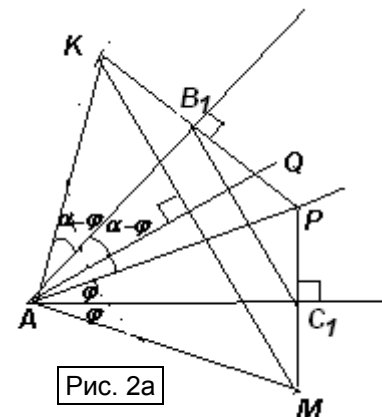


Рис. 2а

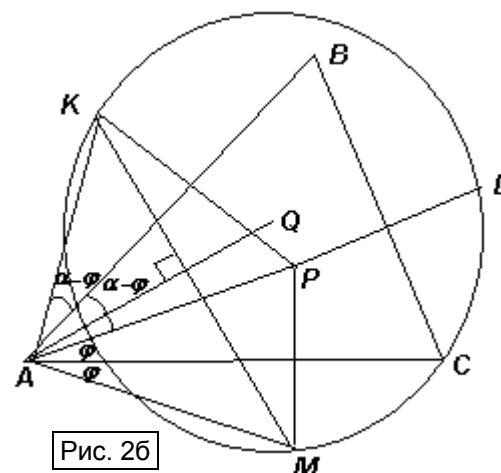


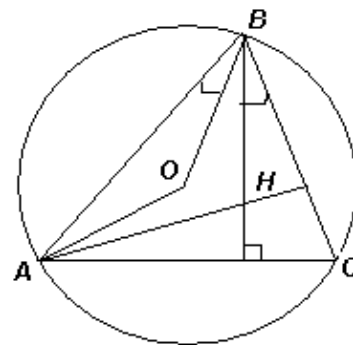
Рис. 2б

Точки P и Q , полученные таким образом, называются изогонально сопряженными относительно треугольника ABC .

Рис. 2в

Следствие. Стороны педального треугольника соответственно перпендикулярны прямым AQ , BQ и CQ тогда и только тогда, когда Q и P изогонально сопряжены.

Один из примеров изогонально сопряженных точек вам хорошо известен. Какой? [Ортоцентр H треугольника и центр O его описанной окружности (см. рис. 2в)]



Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC .

а) Докажите, что: $B_1C_1 = \frac{BC \cdot AP}{2R}$, где R – радиус окружности, описанной около ABC .

б) Прямая m_a проходит через середины отрезков B_1C_1 и PA , прямые m_b и m_c определяются аналогично. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

2. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC . Прямые AP , BP и CP пересекают окружность, описанную около треугольника ABC , в точках A_2 , B_2 и C_2 . Докажите подобие треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

3. Внутри угла BAC даны точки P и Q . Докажите, что AP и AQ – изогоналы тогда и только тогда, когда: а) их расстояния до сторон угла обратно пропорциональны; б) их проекции на стороны угла лежат на одной окружности.

4. а) Докажите, что точки изогонально сопряжены относительно треугольника тогда и только тогда, когда совпадают описанные окружности их педальных треугольников.

б) Где расположен центр этой окружности?

5. Треугольник ABC вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках B и C , пересекаются в точке P . Точка D симметрична вершине A относительно середины отрезка BC . а) Докажите, что P и D – изогонально сопряженные точки относительно треугольника ABC . б) Какой факт, доказанный ранее, из этого следует?

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки A_1 , B_1 и C_1 – проекции точки D на стороны треугольника ABC . Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

7. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и B пересекаются в точке P . Окружность, проходящая через проекции P на прямые BC , CA и AB , повторно пересекает прямую AB в точке C' . Аналогично определяются точки A' и B' . Докажите, что прямые AA' , BB' и CC' пересекаются в одной точке.

8. В треугольнике ABC каждый угол меньше, чем 120° . Докажите, что в этом треугольнике: а) точка T Торричелли изогонально сопряжена точке P Аполлония (точке пересечения окружностей Аполлония, лежащей внутри треугольника). б) лучи AP , BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в вершинах равностороннего треугольника.

9. Пусть $A_1B_1C_1$ – педальный треугольник точки P относительно треугольника ABC , H_1 , H_2 и H_3 – ортоцентры треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C . Точка Q – ортоцентр треугольника $H_1H_2H_3$. Докажите, что: а) P и Q – изогонально сопряженные точки относительно треугольника ABC ; б) треугольники $H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ равны; в) прямые A_1H_1 , B_1H_2 и C_1H_3 пересекаются в одной точке.

10. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность. Докажите, что четырехугольник, образованный проекциями любой точки этой окружности на прямые AC , BC , AD и BD , является вписанным.