

Симедиана треугольника

На двух занятиях подряд мы рассмотрим задачи, связанные с симедианой треугольника.

1. Определение и антипараллельность.

Рассмотрим треугольник ABC , его медиану AM и его биссектрису AL (см. рис. 1а). Пусть луч AS симметричен лучу AM относительно прямой AL , где S – точка пересечения этого луча с BC . Тогда отрезок AS называется **симедианой** треугольника ABC .

Проведем отрезок $C'B'$, параллельный стороне BC , с концами на сторонах AB и AC соответственно (см. рис. 1б). Объясните, почему медиана AM треугольника ABC делит его пополам. [Гомотетия с центром A]

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы AL : образом луча AM является луч AS , а образом отрезка $B'C'$ является отрезок B_1C_1 , антипараллельный этой стороне (см. равенство углов, отмеченных двумя дугами). Точка Q пересечения B_1C_1 и AS является образом точки P пересечения AM и $B'C'$. Так как P – середина $B'C'$, то Q – середина B_1C_1 . Очевидно, что все рассуждения можно провести и в обратную сторону.

Таким образом, мы получили утверждение, равносильное определению симедианы: **отрезок AS ($S \in BC$) является симедианой треугольника ABC тогда и только тогда, когда он, пересекая отрезок, антипараллельный BC , делит его пополам.**

Следствие. Медиана треугольника ABC – симедиана треугольника $AB'C'$.

2. Основное свойство и признак симедианы.

Известно, что медиана делит противоположающую сторону и площадь треугольника пополам. А в каком отношении делит эту сторону и площадь треугольника симедиана?

Пусть в треугольнике ABC : $AB = c$; $AC = b$.

Тогда **AS – симедиана треугольника ABC ($S \in BC$)**

тогда и только тогда, когда $\frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$.

Доказательство. 1) Пусть AS – симедиана треугольника ABC . Проведем перпендикуляры к сторонам AB и AC : MP , MQ , SK и SN (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{BS}{CS} = \frac{S_{\triangle ABS}}{S_{\triangle ACS}} = \frac{c \cdot SK}{b \cdot SN} \quad (*)$$

Из доказанных равенств пар углов следует подобие двух пар прямоугольных треугольников: $\triangle ASK \sim \triangle AMQ$ и $\triangle ASN \sim \triangle AMP$. Следовательно, $\frac{SK}{MQ} = \frac{AS}{AM}$ и $\frac{SN}{MP} = \frac{AS}{AM}$.

Значит, $\frac{SK}{SN} = \frac{MQ}{MP} = \frac{c}{b}$ (последнее равенство следует из того, что треугольники ABM и ACM равновелики). Подставив это в равенство (*), получим требуемое соотношение.

2) Пусть выполняется указанное равенство, но AS – не симедиана. Тогда проведем симедиану AS' , для которой выполняется такое же равенство, и получим, что $S' \equiv S$.

Равенство (*) показывает, что площадь делится симедианой в том же отношении.

Таким образом, и это утверждение эквивалентно определению симедианы.

Рис. 1а

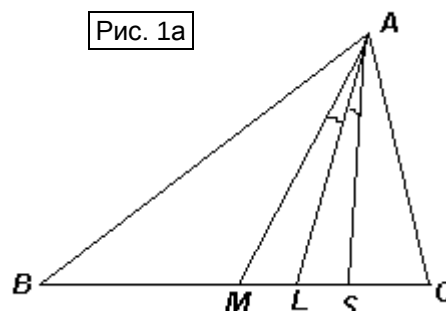


Рис. 1б

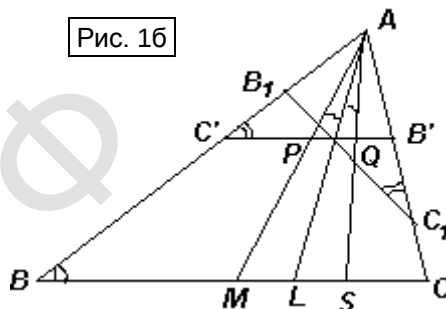
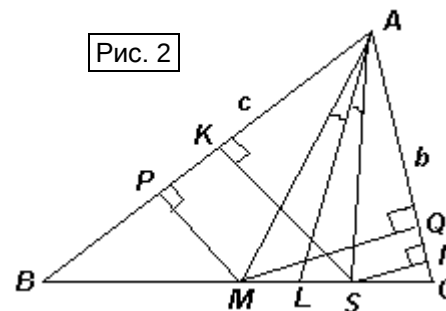


Рис. 2

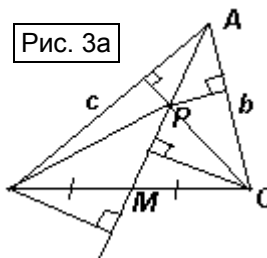


3. Симедиана как геометрическое место точек.

Рассмотрим луч AM , содержащий медиану треугольника ABC (см. рис. 3а). Сформулируем несколькими способами его характеристику в качестве геометрического места точек.

Луч AM , содержащий медиану треугольника ABC , является геометрическим местом точек P , принадлежащих углу A треугольника ABC , для которых:

- 1) Расстояния от вершин B и C до прямой AP равны; 2) $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACP}$; 3) расстояния от точки P до прямых, содержащих стороны AB и AC , обратно пропорциональны этим сторонам.



Аналогичными свойствами обладает и симедиана.

Симедиана – геометрическое место таких точек Q , принадлежащих углу A треугольника ABC , для которых:

- 1) расстояния от вершин B и C до прямой AQ пропорциональны квадратам сторон c и b ; 2) $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{c^2}{b^2}$; 3)

расстояния от точки Q до прямых, содержащих стороны AB и AC , пропорциональны этим сторонам, то есть $\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}$ (см.

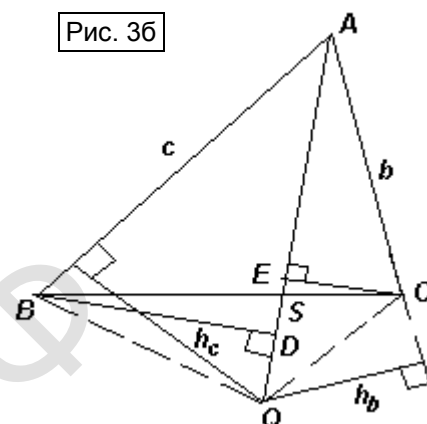
рис. 3б).

Доказательство. Используя, что $\triangle SBD \sim \triangle SCE$ и

доказанное в пункте 2, получим: 1) $\frac{BD}{CE} = \frac{BS}{CS} = \frac{c^2}{b^2}$; 2) $\frac{S_{\triangle ABQ}}{S_{\triangle ACQ}} = \frac{BD}{CE} = \frac{c^2}{b^2}$; 3) $\frac{ch_c}{bh_b} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow$

$$\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}.$$

Отметим, что в этом пункте мы обобщили понятие симедианы, считая ее лучом. Другие важные свойства симедианы будут рассмотрены на следующем занятии.



Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравностороннем треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.
2. В треугольнике ABC отрезки CP и BQ – симедианы. Можно ли утверждать, что треугольник ABC – равнобедренный, если: а) $BP = CQ$; б) $AP = AQ$; в) $PQ \parallel BC$?
3. а) В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC . Симедиана, проведенная из вершины B , пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке D . Докажите, что прямая AC содержит биссектрису угла BMD .
 б) Восстановите треугольник ABC по вершине B , центроиду и точке пересечения симедианы, проведенной из B , с описанной окружностью.
4. В треугольнике ABC с тупым углом B проведена средняя линия MK , параллельная BC . Через вершину A проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника, которая пересекает прямую BC в точке D . Докажите подобие треугольников ADK и CDM .
5. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 – середина стороны AC . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1 .
6. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая a , параллельная BC . Симедиана треугольника, проведенная из вершины B , вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке D . Прямая CD пересекает прямую a в точке X . Докажите, что: а) равны углы ABC и AMX , где M – середина AC ; б) прямая AB является касательной к окружности, описанной около четырехугольника $AMDX$.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H , а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M . Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C .
8. В треугольнике ABC проведена медиана CD . Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает ее в точке M , а серединный перпендикуляр к стороне BC – в точке N . Лучи AM и BN пересекаются в точке P . Докажите, что CP – симедиана треугольника ABC .
9. Точки A' , B' и C' – середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M , отличную от H , то $\angle ABM = \angle CBV'$.
10. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC , BB_1 – его симедиана, луч BB_1 вторично пересекает окружность ω , описанную около треугольника, в точке L . Пусть H_A , H_B и H_C – основания высот треугольника ABC , а луч BH_B вторично пересекает ω в точке T . Докажите, что точки H_A , H_C , T и L лежат на одной окружности.