

Серия 15. Радикальные оси.

1. (а) На прямой ℓ отмечены две различные точки A и B . Докажите, что для каждого вещественного числа λ существует единственная точка $P \in \ell$, удовлетворяющая $AP^2 - BP^2 = \lambda$.
(б) На плоскости отмечены две различные точки A и B и определено вещественное число λ . Докажите, что геометрическим местом точек X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, служит прямая.
 2. (а) На плоскости дана окружность ω с центром O и радиусом R и точка X . Докажите, что $\deg(X, \omega) = OX^2 - R^2$.
(б) На плоскости даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что геометрическим местом точек X , удовлетворяющих $\deg(X, \omega_1) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей ω_1 и ω_2 .
(в) Докажите, что радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей.
-
3. Докажите, что середины четырёх отрезков общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.
 4. На сторонах BC , CA , AB остроугольного треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Докажите, что общие хорды окружностей, построенных на отрезках AA_1 , BB_1 , CC_1 как на диаметрах, пересекаются в ортоцентре треугольника.
 5. На окружности ω_1 с диаметром AB взята точка C , из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB . Докажите, что общая хорда окружности ω_1 и окружности ω_2 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.
 6. В угол BAC вписана окружность ω , B и C — точки касания. Точки M , N — середины отрезков AB , AC . На прямой MN отмечена произвольная точка X . Докажите, что $XA = XD$, где XD — отрезок касательной к ω .
 7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC .
 8. В пятиугольнике $ABCDE$ из каждой вершины опущены перпендикуляры на противоположные стороны (т. е. из A на CD , из B на DE , из C на EA , из D на AB , из E на BC). Четыре из них пересеклись в одной точке. Докажите, что все пять пересеклись в одной точке.
 9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H . Продолжение стороны BC (её середина обозначена за M) пересекает прямую B_1C_1 в точке N . Точки H и H' симметричны относительно BC . Докажите, что точки A , M , N , H' лежат на одной окружности.