

Серия 6. Отношение отрезков. Теорема Фалеса.

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1 , на другой — A_2, B_2, C_2 . Тогда если $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, то $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

1. Изначально жук сидит
(а) на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD .
(б) на стороне AB треугольника ABC . Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC .
Докажите, что жук вернулся в исходную точку.
2. *Свойство биссектрисы.* Пусть AD — (а) внутренняя; (б) внешняя биссектриса равнобедренного треугольника ABC . Докажите, что $BD/DC = AB/AC$.
3. На плоскости нарисованы две прямые. На этих прямых отмечено по три точки: на первой — A, B, C , на второй — A', B', C' . Известно, что $AB' \parallel A'B$ и $AC' \parallel A'C$. Докажите, что $BC' \parallel B'C$.
4. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\frac{AB}{AX} + \frac{AD}{AY} = \frac{AC}{AZ}$.
5. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X . На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1, NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.
6. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C — прямые. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BX и DY на диагональ AC . Докажите, что $AX = CY$.
7. В равнобедренном треугольнике ABC через точку, делящую ломаную BAC пополам, провели прямую ℓ_A , параллельную биссектрисе угла BAC . Аналогично определены прямые ℓ_B и ℓ_C . Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.
8. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC ($\angle A = 60^\circ$). На отрезке AB отмечена точка P , что $PA = PI$. На отрезке BC нашлась такая точка M , что $2\angle BPM = \angle ABC$. Найдите BM/MS .