

Серия 4. Угол между хордой и касательной.

Теорема. На окружности ω отмечены точки A и B , через точку A проведена прямая ℓ . Тогда ℓ касается ω , если и только если $\angle(\ell, AB)$ равен половине меры дуги \overline{AB} .

1. Касательная к описанной окружности неравноболенного треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L — основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
2. Биссектрисы углов B и C остроугольного равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
3. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Касательные к описанным окружностям треугольников AHB и AHC , восстановленные в точке H , пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $XH = YH$.
4. На стороне AB остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка X . Касательная к описанной окружности треугольника BXC , восстановленная в вершине X , пересекает описанную окружность треугольника ACX в точках X и Y . Докажите, что $AU \parallel BC$.
5. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности Ω в точке B , а окружности Ω в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .
6. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
7. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$; O, I — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что AD — касательная к ω .
8. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$). Прямые BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через C' параллельно AC , касается описанной окружности треугольника $B'OC$.