Серия 3. Прямые углы и вписанные четырёхугольники.

1. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H. Докажите, что H — точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Основание A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC отразили симметрично относительно прямой AC. Докажите, что отражённая точка лежит на прямой B_1C_1, где B_1 и C_1 — основания двух других высот треугольника.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка P. Пусть P_C и P_B — проекции точки P на прямые AB, AC соответственно. Докажите, что точки B, C, P_B, P_C лежат на одной окружности.

4. Из основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC опустили перпендикуляры стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1. Докажите, что четыре основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.

5. (*Теорема Симсона*) На описанной окружности треугольника ABC отметили точку P. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника, лежат на одной прямой.

6. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Пусть X — основание перпендикуляра, опущенного из B на AO, M — середина BC, AA_1 — высота треугольника ABC. Докажите, что $XM = MA_1$.

7. В остроугольном треугольнике ABC на продолжениях высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 отметили точки B_2 и C_2 соответственно. Оказалось, что $\angle B_2AC_2 = 90^\circ$. Из точки A опустили перпендикуляр AX на B_2C_2. Докажите, что $\angle BXC = 90^\circ$.

8. Докажите, что в остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.