

Серия 2. Вписанные четырёхугольники.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
2. **Лемма об отражении ортоцентра.** Ортоцентр H вписанного в окружность Ω треугольника ABC отразили относительно прямой BC и относительно середины стороны BC . Получились точки X и Y соответственно. (а) Докажите, что точки X и Y лежат на Ω ; (б) Докажите, что AU — диаметр Ω .
3. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.
5. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E , отличная от точек A и C , а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN . Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.
6. Точка M — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > AC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках B и C , пересекаются в точке P . Отрезки AP и BC пересекаются в точке S . Пусть BD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.
7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .