

Серия 1. Вписанные углы, счёт дуг.

Определения. На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C . Пусть $\widehat{BC}$ — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω . Мерой дуги $\widehat{BC}$ назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180°); угол BAC называется *вписанным* углом, опирающимся на $\widehat{BC}$.

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что (а) AM — биссектриса угла BAC ; (б) AN — биссектриса внешнего угла BAC .
2. *Невероятно полезная задача.* (а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD . (б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC .
3. На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC . Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ .
5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P , что $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$, $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$. Лучи AP, BP, CP продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.
6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C , ω_2 — в точках B и D . Известно, что N лежит вне ω . Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.
7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи BC и AD — в точке Q . Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M ; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N . Докажите, что $KLMN$ — ромб.
8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AA_1 . Перпендикуляр из A_1 на AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке K . Перпендикуляр из A на BK пересекает BC в точке L . Докажите, что точки K, L и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.
9. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка D , а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180^\circ$.