

Полуописанная окружность

Во всех задачах этого листика дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC . Точки I, I_A, I_B, I_C — центры вписанной и трех внеписанных окружностей треугольника ABC напротив вершин A, B, C соответственно. Вписанная окружность ω касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Обозначим через Ω_A окружность, проходящую через вершины B и C и касающуюся ω , точку касания назовем T_A .

1. Докажите, что точки T_A, A_1, I_A лежат на одной прямой.
2. (а) Докажите, что точки T_A, B, C_1, I_A лежат на одной окружности. (б) Окружность из предыдущего пункта пересекает прямую BC второй раз в точке S . Докажите, что $CS = CA_1$.

Средины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 обозначим через M и N соответственно.

3. Докажите, что касательные к ω в точках A_1 и T_A пересекаются на прямой MN .
4. Докажите, что точки T_A, A_1, N и C лежат на одной окружности.

Обозначим вторые точки пересечения отрезков AB и AC с окружностью Ω_A через P и Q соответственно

5. (а) Докажите, что точки T_A, N, C_1 и P лежат на одной окружности. (б) Докажите, что проекция точки I на MN также лежит на окружности из пункта (а).
6. Прямые $T_A M$ и $T_A N$ второй раз пересекают окружность Ω_A в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые PX, QY, MN и AI пересекаются в одной точке.
7. Докажите, что прямые BM, CN и $A_1 T_A$ пересекаются в одной точке.
8. Прямые BM и CN второй раз пересекают окружность ω_A в точках U и V . Докажите, что прямая UV проходит через середины отрезков $B_1 M$ и $C_1 N$.

Аналогично определим $\Omega_B, \Omega_C, T_B, T_C$.

9. Обозначим через W_A середину дуги BC окружности Ω_A , не содержащей точку T_A . Аналогично определим W_B, W_C . Докажите, что существует окружность, касающаяся окружностей $\Omega_A, \Omega_B, \Omega_C$ в точках W_A, W_B, W_C соответственно.
10. Докажите, что прямые AT_A, BT_B, CT_C пересекаются в одной точке.