

Функциональные уравнения

1. Фиксировано натуральное число n . Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывная функция, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f^{(n)}(x) = x$ для любого $x \in [0, 1]$ ($f^{(n)}$ — n -кратное применение f). Докажите, что $f(x) = x$ для всех $x \in [0, 1]$.
2. Постройте хотя бы одну функцию $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ такую, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}^+$ выполняется

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

3. Найдите все функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что $f(xf(y)) = yf(x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^+$ и $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.
4. Найдите все функции $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ такие, что

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

для всех $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

5. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(f(n)) + f(n + 1) = n + 2.$$