

## Планиметрический разнбой

1. В треугольнике  $ABC$ , у которого  $\angle B = 45^\circ$ , проведена высота  $AH$ . На отрезке  $BC$  нашлась отметили такую точку  $K$ , что  $CK = CA$ . Докажите, что центр вневписанной окружности треугольника  $ACH$  напротив вершины  $C$  равноудалён от  $B$  и  $K$ .
2. На описанной окружности треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — проекции  $P$  на  $AB$  и  $AC$ , а  $M$  и  $N$  — середины  $BC$  и  $XY$  соответственно. Докажите, что  $PN \perp MN$ .
3. Вневписанные окружности треугольника  $ABC$  касаются его отрезков  $AB$  и  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков  $PQ$  и  $BC$ , параллельна биссектрисе угла  $BAC$ .
4. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Прямые  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  пересекают внешнюю биссектрису угла  $BAC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что прямые  $C_1X$  и  $B_1Y$  пересекаются на вписанной окружности треугольника  $ABC$ .
5. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ;  $P$  — произвольная точка плоскости. Серединный перпендикуляр к отрезку  $PA_1$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $A_2$ . Точки  $B_2$  и  $C_2$  строятся аналогично. Докажите, что  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной прямой.
6. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Вписанная окружность треугольника  $ABD$  касается сторон  $AB$ ,  $AD$ ,  $BD$  в точках  $P$ ,  $U$ ,  $M$ . Вневписанная окружность треугольника  $ACD$  касается отрезка  $CD$  в точке  $N$  и прямых  $AC$ ,  $AD$  в точках  $Q$  и  $W$ . Докажите, что  $W$  лежит на прямой  $PM$ , а  $U$  — лежит на прямой  $QN$ .
7. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечена произвольная точка  $X$ . Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников  $ABX$  и  $ACX$ , отличная от  $BC$ , пересекает отрезок  $AX$  в точке  $Y$ . Докажите, что длина отрезка  $AU$  не зависит от выбора точки  $X$ .