Аддитивная комбинаторика

1. Из различных натуральных чисел, каждое из которых меньше n, составлены два набора. Докажите, что если общее количество чисел в наборах не меньше n, то из каждого набора можно выбрать по одному числу так, чтобы их сумма была равна n.

2. Пусть A и B — конечные множества натуральных чисел. Через $A+B$ обозначим множество чисел $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Докажите, что $|A+B| \geqslant |A|+|B|-1$.

3. Среди чисел от 1 до 100 выбрали некоторые 16. Докажите, что среди этих шестнадцати найдутся различные a, b, c, d такие, что $a+b=c+d$.
Кстати, такая конфигурация чисел называется параллелограммом.

4. Дано 101 различных натуральных чисел из диапазона от 1 до 10^6, эти числа будут синими. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы суммы красного и синего ($100 \cdot 101$ сумм) числа не совпадали.

5. Числа $1, 2, \ldots, 2n$ разбиты на два множества по n чисел. Для каждого множества посчитали все n^2 возможных сумм $a+b$, где a и b из этого множества, и от каждой суммы взяли остаток по модулю $2n$. Докажите, что набор из n^2 остатков от одного множества совпадает с набором из n^2 остатков от другого.

6. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — различные натуральные числа, а M — множество из $n-1$ натуральных чисел, не содержащее число $a_1+a_2+\ldots+a_n$. Кузнечик сидит в нуле. Докажите, что он может сделать так прыжки вправо длинами $a_1, \ldots, a_n$ в некотором порядке (каждой длины должен быть ровно один прыжок), что он не попадёт ни в одно число множества M.

7. *Теорема Коши-Дэвенпорта.* Пусть A и B — два подмножества множества остатков по модулю p, где p — простое число. Докажите, что $|A+B| \geqslant \min\{p, |A|+|B|-1\}$.

8. *Теорема Шура.* Все числа натурального ряда покрашены в один из k цветов. Докажите, что найдутся такие числа a, b, c одного цвета, что $a+b=c$.