

Аффинная стереометрия

1. (Теорема Менелая) На рёбрах AB , BC , CD , DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K , L , M , N соответственно. Докажите, что K , L , M , N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1.$$

2. Точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — середины рёбер SA , SB , SC , SD пирамиды $SABCD$ соответственно. Известно, что отрезки AC_1 , BD_1 , CA_1 , DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.
3. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом. Соединим точку касания двух из них с точкой касания двух оставшихся. Докажите, что три построенных (выбирая разные разбиения сфер на пары) отрезка пересекаются в одной точке.
4. Докажите, что плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.
5. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники ABB_1A_1 , BCC_1A_1 , CAA_1C_1 , причём его рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 параллельны (кажется, это называется *кососечённой призмой*). Пусть P и P_1 — точки пересечения троек плоскостей A_1BC , AB_1C , ABC_1 и AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.
6. Пусть A_1 , B_1 , C_1 , D_1 — соответственно середины рёбер SA , SB , SC , SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники ABC_1D_1 , A_1BCD_1 , A_1B_1CD , AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.
7. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром в точке O . Пусть ℓ_A — прямая, соединяющая точку пересечения медиан грани BCD с точкой, симметричной A относительно O . Аналогично определены прямые ℓ_B , ℓ_C , ℓ_D . (а) Докажите, что прямые ℓ_A , ℓ_B , ℓ_C , ℓ_D пересекаются в одной точке (назовём её X). (б) Докажите, что прямая, соединяющая X с серединой ребра AB , перпендикулярна CD .
8. Назовём многогранник *кубоподобным*, если у него шесть четырёхугольных граней и восемь вершин, в каждой из которых сходится по три грани.

Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника, пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.