10 класс

По мотивам ММО

12 марта 2018

1. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на 4 части. Сколько корней у этого трёхчлена?

2. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

3. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots a_k$ таковы, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1$. Докажите, что у уравнения $[\frac{n}{a_1}] + [\frac{n}{a_2}] + \ldots + \ldots + [\frac{n}{a_k}] = n$ не более $a_1 a_2 \ldots a_k$ решений в натуральных числах.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. Например, выражение $a \ ? \ b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.

6. Существуют ли натуральное число n и многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, такие, что при всех действительных x верно

а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$; **б)** $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

7. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

8. На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из которых дружат между собой. Несколько попарно знакомых участников назовём *кружком*, если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не сидят все представители какого-либо кружка.

10 класс

По мотивам ММО

12 марта 2018

1. Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на 4 части. Сколько корней у этого трёхчлена?

2. Андрей Степанович каждый день выпивает столько капель валерьянки, сколько в этом месяце уже было солнечных дней (включая текущий день). Иван Петрович каждый пасмурный день выпивает количество капель валерьянки, равное номеру дня в месяце, а в солнечные дни не пьет. Докажите, что если в апреле ровно половина дней будет пасмурные, а другая половина — солнечные, то Андрей Степанович и Иван Петрович выпьют за месяц поровну валерьянки.

3. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots a_k$ таковы, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1$. Докажите, что у уравнения $[\frac{n}{a_1}] + [\frac{n}{a_2}] + \ldots + \ldots + [\frac{n}{a_k}] = n$ не более $a_1 a_2 \ldots a_k$ решений в натуральных числах.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами. На стороне AD выбирается произвольная точка P. Описанные окружности треугольников ABP и CDP вторично пересекаются в точке Q. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора точки P.

5. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. Например, выражение $a \ ? \ b$ обозначает одно из следующих: $a - b$, $b - a$ или $a + b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!» и «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$.

6. Существуют ли натуральное число n и многочлен $P(x)$ степени n, имеющий n различных действительных корней, такие, что при всех действительных x верно

а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$; **б)** $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?

7. На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABC_1, BCD_1, CDE_1, DEF_1, EFA_1 и FAB_1. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — равносторонний. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также равносторонний.

8. На олимпиаду пришло 2018 участников, некоторые из которых дружат между собой. Несколько попарно знакомых участников назовём *кружком*, если любой другой участник олимпиады не знаком с кем-то из них. Докажите, что можно рассадить всех участников олимпиады по 90 аудиториям так, что ни в какой аудитории не сидят все представители какого-либо кружка.