10 класс Комбинаторный разнобой 5 марта 2018

1. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, центры каждых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (*Магическим* называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)

2. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки являются *соседними*, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастёт.

3. В каждой клетке квадратной таблицы 50×50 находится либо 1, либо -1, причём сумма всех чисел таблицы не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что найдётся такой квадрат 25×25, что абсолютная величина суммы чисел, находящихся в этом квадрате, не превосходит 25.

4. Квадратный лист бумаги разрезали по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезали на две части, и так много раз. Какое наименьшее число разрезов необходимо, чтобы среди полученных частей могло оказаться ровно 100 двадцатиугольников?

5. *Медианой* системы точек назовём такую прямую, проходящую через две точки системы, что по разные стороны от этой прямой находится одинаковое число точек. Какое наименьшее число медиан может быть у системы из $2n$ точек общего положения?

6. На плоскости внутри квадрата 1×1 сидят n зайцев. Если $AA'BB'$ — прямоугольник, то за один ход два зайца могут прыгнуть из точек A и B в точки A' и B'. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее $\sqrt{n}$.

7. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

8. Есть n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель при нажатии меняет состояние лампочек из некоторого набора. Докажите, что лампочки можно привести в любое положение тогда и только тогда, когда для любого набора лампочек есть выключатель, меняющий состояние нечетного числа из этих лампочек.

10 класс Комбинаторный разнобой 5 марта 2018

1. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \ldots, n^2$, центры каждых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (*Магическим* называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)

2. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки являются *соседними*, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастёт.

3. В каждой клетке квадратной таблицы 50×50 находится либо 1, либо -1, причём сумма всех чисел таблицы не больше 100 и не меньше -100. Докажите, что найдётся такой квадрат 25×25, что абсолютная величина суммы чисел, находящихся в этом квадрате, не превосходит 25.

4. Квадратный лист бумаги разрезали по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезали на две части, и так много раз. Какое наименьшее число разрезов необходимо, чтобы среди полученных частей могло оказаться ровно 100 двадцатиугольников?

5. *Медианой* системы точек назовём такую прямую, проходящую через две точки системы, что по разные стороны от этой прямой находится одинаковое число точек. Какое наименьшее число медиан может быть у системы из $2n$ точек общего положения?

6. На плоскости внутри квадрата 1×1 сидят n зайцев. Если $AA'BB'$ — прямоугольник, то за один ход два зайца могут прыгнуть из точек A и B в точки A' и B'. Докажите, что никакие два зайца не удалятся друг от друга на расстояние, большее $\sqrt{n}$.

7. У повара в подчинении десять поварят, некоторые из которых дружат между собой. Каждый рабочий день повар назначает одного или нескольких поварят на дежурство, а каждый из дежурных поварят уносит с работы по одному пирожному каждому своему недежурящему другу. В конце дня повар узнает количество пропавших пирожных. Сможет ли он за 45 рабочих дней понять, кто из поварят дружит между собой, а кто нет?

8. Есть n лампочек и несколько выключателей. Каждый выключатель при нажатии меняет состояние лампочек из некоторого набора. Докажите, что лампочки можно привести в любое положение тогда и только тогда, когда для любого набора лампочек есть выключатель, меняющий состояние нечетного числа из этих лампочек.