10 класс

Уравнения Пелля

19 февраля 2018

Определение 1. *Уравнение Пелля* – это уравнение в целых числах вида

$$x^2 - my^2 = 1,$$

где m — натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Определение 2. Назовем решение уравнения Пелля (x_0, y_0) *нетривиальным*, если $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$.

Определение 3. Нетривиальное решение уравнения Пелля (x_0, y_0) называется *минимальным*, если $x_0, y_0 > 0$ и $x_0 + y_0$ минимально среди всех положительных решений уравнения Пелля.

Определение 4. Рассмотрим множество $Q[\sqrt{m}]$, состоящее из чисел вида $x + y\sqrt{m}$, где x, y – целые, m — натуральное. Для каждого числа определим норму $N(x + y\sqrt{m}) = x^2 - my^2$. Будем говорить, что $a \in Q[\sqrt{m}]$ делится на $b \in Q[\sqrt{m}]$, если существует $c \in Q[\sqrt{m}]$, такое что $a = bc$.

1. Докажите, что если $a, b \in Q[\sqrt{m}]$, то $N(ab) = N(a) \cdot N(b)$, $N(\frac{a}{b}) = \frac{N(a)}{N(b)}$ (если $N(b) \neq 0$).

2. а) Пусть $x_1 + y_1\sqrt{m}$ и $x_2 + y_2\sqrt{m}$ принадлежат $Q[\sqrt{m}]$, $n = N(x_2 + y_2\sqrt{m})$. Докажите, что если $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ и $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$, то $x_1 + y_1\sqrt{m}$ делится на $x_2 + y_2\sqrt{m}$.

б) Докажите, что если существует хотя бы $n^2 + 1$ решение уравнения $x^2 - my^2 = n$, то существует некоторое нетривиальное решение уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$.

3. Пусть пара чисел (a, b) является минимальным решением уравнения Пелля $x^2 - my^2 = 1$. Определим преобразование $f(x, y) = (ax + mby, ay + bx)$.

а) Докажите, что если (x_0, y_0) — решение уравнения Пелля, то $f(x_0, y_0)$ — тоже решение уравнения Пелля.

б) Заметим, что, исходя из тривиального решения $(1, 0)$, мы можем получить бесконечную последовательность решений (x_i, y_i) по формуле $(x_i, y_i) = f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Докажите, что не существует положительных решений уравнения Пелля, отличных от элементов данной последовательности.

4. Теорема Минковского. На плоскости нарисован выпуклый центрально-симметричный многоугольник с центром в точке $(0; 0)$. Площадь многоугольника больше четырёх. Докажите, что внутри него есть ещё хотя бы одна целая точка.

5. Рассмотрим гиперболы, заданные уравнениями $x^2 - my^2 = N$ и $x^2 - my^2 = -N$. Выберем две точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ на первой гиперболе и две точки с координатами $(\sqrt{m}y_0; \frac{x_0}{\sqrt{m}})$, $(-\sqrt{m}y_0; -\frac{x_0}{\sqrt{m}})$ на второй.

а) Докажите, что площадь параллелограмма с вершинами в этих точках не зависит от x_0 и y_0. Найдите эту площадь.

б) Докажите, что для некоторого N на гиперболе, заданной уравнением $x^2 - my^2 = N$, найдется бесконечно много целых точек.

в) Докажите, что любое уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.

6. Найдите все натуральные n такие, что $C_n^{k-1} = 2C_n^k + C_n^{k+1}$ для некоторого $k < n$.

7. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где a, b – некоторые неотрицательные целые числа. Аналогично, назовем *черными* числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$, где c, d – некоторые неотрицательные целые числа. Докажите, что существует бесконечно много черных чисел, представимых в виде суммы нескольких белых.

8. Пусть p — простое число вида $4k + 3$. Докажите, что ровно одно из уравнений $x^2 - py^2 = \pm 2$ имеет решения в натуральных числах.