

Определение 1. Комплексное число $a + bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Его *нормой* назовём число $\|a + bi\| = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Множество целых гауссовых чисел обозначим $\mathbf{Z}[i]$.

Определение 2. Целое гауссово число u кратно целому гауссову числу v , если существует целое гауссово число w такое, что $u = vw$.

Определение 3. Целое гауссово число u называется *обратимым* (или *делителем единицы*), если существует целое гауссово число v такое, что $uv = 1$.

Определение 4. Все гауссовые числа делятся на делители единицы, поэтому любое гауссово число, отличное от делителей единицы, имеет как минимум следующие делители: делители единицы и их произведения на само это число. Такие делители называются *тривиальными*.

Определение 5. Простое целое гауссово число — это ненулевое число, не имеющее других делителей, кроме тривиальных. Число, не являющееся простым, называется *составным*.

1. а) Найдите все целые гауссовые обратимые числа.

б) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, т.е. для любых $a, b \in \mathbf{Z}[i]$ ($b \neq 0$) найдутся $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$.

в) Докажите, что любое гауссово число, отличное от делителей единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножение их на делители единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых.

2. а) Докажите, что любой делитель p числа $m^2 + 1$, где m — целое, представим в виде суммы квадратов двух чисел.

б) Докажите, что любое простое число $p = 4k + 1$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. а) Докажите, что если норма целого гауссового числа z — простое натуральное число, то z является простым гауссовым.

б) Докажите, что если z является простым гауссовым, отличным от целого числа, то его норма — простое натуральное число.

в) Докажите, что если $p = 4k + 3$ — простое число, то оно является простым гауссовым числом.

4. Докажите, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т.е. не получающимся один из другого перестановкой слагаемых) способами.

5. Пусть p — целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на p ?

6. Пусть $m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, где все простые числа p_i различны и имеют вид $4k + 1$, а все числа α_i нечётны. Докажите, что количество представлений числа m в виде $a + b$, где a и b — точные квадраты, равно $(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$.

7. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 + 1 = y^3$; б) $x^2 + 4 = y^3$.

Определение 1. Комплексное число $a + bi$ называется *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Его *нормой* назовём число $\|a + bi\| = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Множество целых гауссовых чисел обозначим $\mathbf{Z}[i]$.

Определение 2. Целое гауссово число u кратно целому гауссову числу v , если существует целое гауссово число w такое, что $u = vw$.

Определение 3. Целое гауссово число u называется *обратимым* (или *делителем единицы*), если существует целое гауссово число v такое, что $uv = 1$.

Определение 4. Все гауссовые числа делятся на делители единицы, поэтому любое гауссово число, отличное от делителей единицы, имеет как минимум следующие делители: делители единицы и их произведения на само это число. Такие делители называются *тривиальными*.

Определение 5. Простое целое гауссово число — это ненулевое число, не имеющее других делителей, кроме тривиальных. Число, не являющееся простым, называется *составным*.

1. а) Найдите все целые гауссовые обратимые числа.

б) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, т.е. для любых $a, b \in \mathbf{Z}[i]$ ($b \neq 0$) найдутся $q, r \in \mathbf{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $\|r\| < \|b\|$.

в) Докажите, что любое гауссово число, отличное от делителей единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножение их на делители единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых.

2. а) Докажите, что любой делитель p числа $m^2 + 1$, где m — целое, представим в виде суммы квадратов двух чисел.

б) Докажите, что любое простое число $p = 4k + 1$ представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3. а) Докажите, что если норма целого гауссового числа z — простое натуральное число, то z является простым гауссовым.

б) Докажите, что если z является простым гауссовым, отличным от целого числа, то его норма — простое натуральное число.

в) Докажите, что если $p = 4k + 3$ — простое число, то оно является простым гауссовым числом.

4. Докажите, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т.е. не получающимся один из другого перестановкой слагаемых) способами.

5. Пусть p — целое простое гауссово число. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность никаких двух не делилась на p ?

6. Пусть $m = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, где все простые числа p_i различны и имеют вид $4k + 1$, а все числа α_i нечётны. Докажите, что количество представлений числа m в виде $a + b$, где a и b — точные квадраты, равно $(\alpha_1 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_r + 1)$.

7. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 + 1 = y^3$; б) $x^2 + 4 = y^3$.