10 класс **Теория вероятностей** 18 января 2018

Определение. *Дискретным вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлено число p_i, удовлетворяющее условиям $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i – *элементарными исходами*. Для каждого события $A \in \Omega$ определена его *вероятность* $P(A)$ посредством формулы $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.
Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum_{i=1}^n p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \mu) = E\xi + E\mu$, $E(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot E(\xi)$.
Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $\mathcal{I}_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \backslash A$. Верно равенство $P(A) = E\mathcal{I}_A$.

1. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:
а) Вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.
б) Математическое ожидание числа упавших гномиков.

2. В классе n школьников, они посещают t кружков, каждый кружок посещают ровно k школьников, причём $t < 2^{k-1}$. Докажите, что школьников можно разделить на умных и не очень умных так, чтобы на каждом кружке присутствовали и те, и другие.

3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный (все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

4. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, ..., n\}$,которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum_{k=1}^n k \cdot p_n(k) = n!$.

5. За бесконечным (в обе стороны) столом сидит счетное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна 1/2. Также с вероятностью 1/4 ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью 1/4 — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найти вероятность, что сидящий в ряду школьник Вася получит решение задачи.

6. У неумелого трейдера Васи появился миллион биткоинов. Известно, что каждый день биткоин с вероятностью 0.5 либо дорожает, либо дешевеет. Каждый день Вася предсказывает подорожает биткоин или нет. Если он угадывает, то выигрывает еще один биткоин, а если нет – то теряет.
а) Найдите вероятность того, что через m дней Вася заработает k биткоинов.
б) Найдите вероятность того, что через m дней Вася заработает k биткоинов и при этом каждый день будет иметь как минимум d биткоинов.
с) Докажите, что с вероятностью 1 в какой-то момент у Васи не останется денег.

7. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.

10 класс — **Теория вероятностей** — 18 января 2018

Определение. *Дискретным вероятностным пространством* называется конечное (или счётное) множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, каждому элементу ω_i которого сопоставлено число p_i, удовлетворяющее условиям $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Подмножества вероятностного пространства Ω называются *событиями*, элементы ω_i – *элементарными исходами*. Для каждого события $A \in \Omega$ определена его *вероятность* $P(A)$ посредством формулы $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.
Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum_{i=1}^{n} p_i \xi(\omega_i)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \mu) = E\xi + E\mu$, $E(\lambda \cdot \xi) = \lambda \cdot E(\xi)$.
Каждому событию $A \subset \Omega$ можно сопоставить его *индикатор* — случайную величину $\mathcal{I}_A(\omega)$, равную 1 для $\omega \in A$ и 0 при $\omega \in \Omega \backslash A$. Верно равенство $P(A) = E\mathcal{I}_A$.

1. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:
а) Вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.
б) Математическое ожидание числа упавших гномиков.

2. В классе n школьников, они посещают t кружков, каждый кружок посещают ровно k школьников, причём $t < 2^{k-1}$. Докажите, что школьников можно разделить на умных и не очень умных так, чтобы на каждом кружке присутствовали и те, и другие.

3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна $\frac{1}{6}$. Докажите, что кубик правильный (все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

4. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок множества $\{1, 2, ..., n\}$,которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$.

5. За бесконечным (в обе стороны) столом сидит счетное число школьников, решающих задачу. Для каждого школьника вероятность решить ее самостоятельно равна $1/2$. Также с вероятностью $1/4$ ему удастся подсмотреть в тетрадь соседа слева, и с вероятностью $1/4$ — в тетрадь соседа справа. Все эти события (для всех школьников) независимы между собой. Если кто-то из школьников получил решение задачи, то каждый подсмотревший к нему в тетрадь также его получает. Найти вероятность, что сидящий в ряду школьник Вася получит решение задачи.

6. У неумелого трейдера Васи появился миллион биткоинов. Известно, что каждый день биткоин с вероятностью 0.5 либо дорожает, либо дешевеет. Каждый день Вася предсказывает подорожает биткоин или нет. Если он угадывает, то выигрывает еще один биткоин, а если нет – то теряет.
а) Найдите вероятность того, что через m дней Вася заработает k биткоинов.
б) Найдите вероятность того, что через m дней Вася заработает k биткоинов и при этом каждый день будет иметь как минимум d биткоинов.
с) Докажите, что с вероятностью 1 в какой-то момент у Васи не останется денег.

7. Дано несколько различных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать не менее трети так, чтобы среди выбранных не нашлось тройки различных x, y, z таких, что $x + y = z$.